

第 3 問 (選択問題) (配点 20)

複数人がそれぞれプレゼントを一つずつ持ち寄り、交換会を開く。ただし、プレゼントはすべて異なるとする。プレゼントの交換は次の手順で行う。

手順

外見が同じ袋を人数分用意し、各袋にプレゼントを一つずつ入れたうえで、各参加者に袋を一つずつでたらめに配る。各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る。

交換の結果、1 人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は、交換をやり直す。そして、全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する。

n 人のプレゼント交換をするとき n 人のプレゼントを順に ①, ②, ..., ①① とし

これを 1 列に並び、左から順に受け取る。受け取り方は $n!$ 通り

また、左から順番に ① 以外となる受け取り方を a_n 通りとする。

(i) a_2 は

② ①

のみで

$$a_2 = \boxed{1}$$

$$P_2 = \frac{a_2}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

受け取り方は $\boxed{1}$ 通りある。したがって、1 回目の交換で交換会が終了する確率は

$$\boxed{1}$$

$$\boxed{2}$$

である。

である。

(ii) a_3 は

② ③ ①

③ ② ①

$$a_3 = \boxed{2}$$

$$P_3 = \frac{a_3}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

(ii) 3 人で交換会を開く場合、1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの

受け取り方は $\boxed{2}$ 通りある。したがって、1 回目の交換で交換会が終了する確率は

$$\boxed{1}$$

$$\boxed{3}$$

である。

である。

(iii) 3 人で交換会を開く場合、4 回以下の交換で交換会が終了する確率は

$$\boxed{65}$$

$$\boxed{81}$$

である。

である。

(iii) 3 人で交換会を開く場合、1 回で交換会が終了しない確率は

$$1 - P_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$4 \text{ 回以下の交換で交換会が終了しない確率は } \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

よて 4 回以下の交換で交換会が終了する確率は

$$1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

全事象の確率

- (2) 4人で交換会を開く場合、1回目の交換で交換会が終了する確率を次の構想に基づいて求めてみよう。

構想

1回目の交換で交換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数を求める。そのために、自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする。

h_1
4人うち、
自分のプレゼントを受け取る
1人決める
それ以外の3人は自分以外の
プレゼント

自分の持参したプレゼントを受け取る人数が m 人となる場合の数を h_m とする
①, ②, ..., ④ を一列に並べ、左から番号が ④ となる人がちょうど m 人となる並びに等しい

$$h_1 = {}_4C_1 \times {}_3A_3$$

$$= 4 \times 2$$

$$= \boxed{8} \text{ ヲ}$$

同様に、

$$h_2 = {}_4C_2 \times {}_2A_2$$

$$= 6 \times 1$$

$$= \boxed{6} \text{ シ}$$

$$h_3 = 0$$

$$h_4 = 1 \text{ (①②③④のみ)}$$

1回目の交換で、4人のうち、ちょうど1人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は $\boxed{8}$ 通りあり、ちょうど2人が自分のプレゼントを受け取る場合は $\boxed{6}$ 通りある。このように考えていくと、1回目のプレゼントの受け取り方のうち、1回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は $\boxed{15}$ である。

したがって、1回目の交換で交換会が終了する確率は $\frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$ である。

- (3) 5人で交換会を開く場合、1回目の交換で交換会が終了する確率は

$$h_1 = 4! - 15$$

$$= 24 - 15$$

$$= 9$$

$$h_2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

$$h_3 = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$h_4 = 1$$

$$h_5 = 0$$

$$\frac{\boxed{11}}{\boxed{30}}$$

である。

(2) と同様に考え

$$h_1 = {}_5C_1 \times {}_4A_4 = 5 \times 24 = 120$$

$$h_2 = {}_5C_2 \times {}_3A_3 = 10 \times 6 = 60$$

$$h_3 = {}_5C_3 \times {}_2A_2 = 10 \times 2 = 20$$

$$h_4 = 5$$

$$h_5 = 1$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = 120 + 60 + 20 + 5 + 1 = 206$$

$$A_5 = 5! - 206 = 120 - 206 = -86$$

$$A_5 = 5! - 76 = 120 - 76 = 44$$

$$P_5 = \frac{A_5}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

- (4) A, B, C, D, E の5人が交換会を開く。1回目の交換でA, B, C, Dが、それぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき、その回で交換

$$\frac{\boxed{44}}{\boxed{53}}$$

である。

① 完全順列
(かくしん)
完全順列
モンテール数
の問題が背景で
 $a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)$
もよく知られている

- (4) 1回目の交換でA, B, C, Dが自分以外の持参したプレゼントを受け取ったとき

⑤ Eも自分以外のプレゼントを受け取る受け取り方は
 $A_5 = 44$

⑥ Fは自分のプレゼントを受け取る受け取り方は
 $A_4 = 9$

求める条件付き確率は $\frac{\boxed{44}}{\boxed{44+9}} = \frac{44}{53}$ である。

9通り
①②③④
②③④①
③④①②
④①②③
③①④②
④②①③
①④②③
②④③①
③②①④