

第5問（選択問題）（配点 16）

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 15 ページの正規分布表を用いてもよい。

花子さんは、マイクロプラスチックと呼ばれる小さなプラスチック片（以下、MP）による海洋中や大気中の汚染が、環境問題となっていることを知った。花子さんたち 49 人は、面積が 50 a（アール）の砂浜の表面にある MP の個数を調べるため、それぞれが無作為に選んだ 20 cm 四方の区画の表面から深さ 3 cm までをすくい、MP の個数を研究所で数えてもらうことにした。そして、この砂浜の 1 区画あたりの MP の個数を確率変数 X として考えることにした。

このとき、 X の母平均を m 、母標準偏差を σ とし、標本 49 区画の 1 区画あたりの MP の個数の平均値を表す確率変数を $\bar{X}$ とする。

花子さんたちが調べた 49 区画では、平均値が 16、標準偏差が 2 であった。

(1) 砂浜全体に含まれる MP の全個数 M を推定することにする。

花子さんは、次の方針で M を推定することとした。

方針

砂浜全体には 20 cm 四方の区画が 125000 個分あり、 $M = 125000 \times m$ なので、 M を $W = 125000 \times \bar{X}$ で推定する。

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 確率変数 $\bar{X}$ は、標本の大きさ 49 が十分に大きいので、平均 $\boxed{0}$ 、標準偏差 $\boxed{7}$ の正規分布に近似的に従う。

$\frac{125000}{7}$ そこで、方針に基づいて考えると、確率変数 W は平均 $\boxed{4}$ 、標準偏差 $\boxed{5}$ の正規分布に近似的に従うことがわかる。

このとき、 X の母標準偏差 σ は標本の標準偏差と同じ $\sigma = 2$ と仮定する

と、 M に対する信頼度 95% の信頼区間は $\boxed{193} \times 10^4 \leq M \leq \boxed{207} \times 10^4$ となる。

母平均の推定

$$125000 \cdot 16 - 1.96 \cdot \frac{125000}{7} \cdot 2 \leq M \leq 125000 \cdot 16 + 1.96 \cdot \frac{125000}{7} \cdot 2$$
$$125000 (16 - 0.56) \leq M \leq 125000 (16 + 0.56)$$
$$15.44 \leq M \leq 16.56$$

$$\boxed{193 \times 10^4 \leq M \leq 207 \times 10^4}$$

$$\frac{1.96}{7} = 0.28$$
$$\begin{array}{r} 15.44 \\ \times 125000 \\ \hline 7720 \\ 3088 \\ 1544 \\ \hline 1930000.00 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 16.56 \\ \times 125000 \\ \hline 8280 \\ 3312 \\ 1656 \\ \hline 2070000.00 \end{array}$$

$\bar{X}$ は $N(m, \frac{\sigma^2}{49})$ に従う $\boxed{0}$ $\boxed{7}$
 $W = 125000 \bar{X}$ は $N(125000m, (\frac{125000}{7})^2 \sigma^2)$ に従う $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

ア の解答群

- | | | | | |
|-------|--------|--------|---------|---------|
| ④ m | ① $4m$ | ② $7m$ | ③ $16m$ | ④ $49m$ |
| ⑤ X | ⑥ $4X$ | ⑦ $7X$ | ⑧ $16X$ | ⑨ $49X$ |

イ の解答群

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|--------------|
| ④ σ | ① 2σ | ② 4σ | ③ 7σ | ④ 49σ |
| ⑤ $\frac{\sigma}{2}$ | ⑥ $\frac{\sigma}{4}$ | ⑦ $\frac{\sigma}{7}$ | ⑧ $\frac{\sigma}{49}$ | |

ウ の解答群

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|
| ④ $\frac{16}{49}m$ | ① $\frac{4}{7}m$ | ② $49m$ | ③ $\frac{125000}{49}m$ |
| ④ $125000m$ | ⑤ $\frac{16}{49}\bar{X}$ | ⑥ $\frac{4}{7}\bar{X}$ | ⑦ $49\bar{X}$ |
| ⑧ $\frac{125000}{49}\bar{X}$ | ⑨ $125000\bar{X}$ | | |

エ の解答群

- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------------------|
| ④ $\frac{\sigma}{49}$ | ① $\frac{\sigma}{7}$ | ② 49σ | ③ $\frac{125000}{49}\sigma$ |
| ④ $\frac{31250}{7}\sigma$ | ⑤ $\frac{125000}{7}\sigma$ | ⑥ 31250σ | ⑦ 62500σ |
| ⑧ 125000σ | ⑨ 250000σ | | |

(2) 研究所が昨年調査したときには、1区画あたりのMPの個数の母平均が15、母標準偏差が2であった。今年の母平均 m が昨年とは異なるといえるかを、有意水準 5% で仮説検定をする。ただし、母標準偏差は今年も $\sigma = 2$ とする。

帰無仮説 H_0

「今年の母平均は15である」

対立仮説 H_1

「今年の母平均は15でない」

H_0 が正しいとすると $\bar{X}$ は

$$N\left(15, \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

に近づくため

$$Z = \frac{\bar{X} - 15}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{7}}{2}(\bar{X} - 15)$$

は $N(0, 1)$ に従う

花子さんたちの調査結果から

平均値 16 なのを

$$Z = \frac{2}{\sqrt{7}}(16 - 15) = \frac{\sqrt{7}}{2} = 3.5$$

$$P(Z \leq -3.5) + P(Z \geq 3.5)$$

の和は

$$P(Z \leq -1.96) + P(Z \geq 1.96) = 0.05$$

より小さい

棄却域に入っているの

H_0 は棄却される

ゆえに H_1 は正しいと

判断できるの

今年の母平均 m は昨年と

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

まず、帰無仮説は「今年の母平均は」であり、対立仮説は「今年

の母平均は」である。

次に、帰無仮説が正しいとすると、 $\bar{X}$ は平均

標準偏差

正規分布に近似的に従うため、確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - 15}{\frac{2}{\sqrt{7}}}$ は標準正規分布に

近似的に従う。

花子さんたちの調査結果から求めた Z の値を z とすると、標準正規分布に

において確率 $P(Z \leq -|z|)$ と確率 $P(Z \geq |z|)$ の和は 0.05 よりも

有意水準 5% で今年の母平均 m は昨年と

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

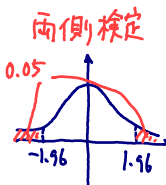
異なるといえる

異なるといえる

異なるといえる

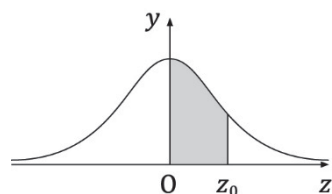
異なるといえる

異なるといえる



正規分布表

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。

[illegible]