数列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$ を

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)}, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1)　$0 < \theta < \pi$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{4}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)}$$

(2)　S_n を n を用いて表せ．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - 1 < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}$$

であることを用いて構わない．

〔2026　大阪公立大 理系 前期〕

〔**解答例**〕

(1)　$0 < \theta < \pi$ のとき

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

であることから

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)} &= \frac{2}{1-\cos\theta} + \frac{2}{1+\cos\theta} \\ &= \frac{2(1+\cos\theta)+2(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \\ &= \frac{4}{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{4}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{4}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)} \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

は示された．

(2)

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2^{n+1}}\pi \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$$

とおくと，$0 < \theta_k < \pi$ を満たし

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2\theta_k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2^{n+1}}\pi} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2^{n+1}}\pi} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3}{2^{n+1}}\pi} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\pi} \end{aligned}$$

Ⓐ に $\theta = \theta_k$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sin^2\theta_k} &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta_k}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1+2^{n+1}}{2^{n+2}}\pi\right)} \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} 4S_n &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{4}{\sin^2\theta_k} \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi} + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1+2^{n+1}}{2^{n+2}}\pi\right)} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2^{n+2}}\pi} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\pi} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+2}}\pi} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\pi} \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi} \\ &= S_{n+1} \end{aligned}$$

すなわち　$S_{n+1} = 4S_n$

ここで

$$S_1 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{4}} = 2 + 2 = 4$$

よって，数列 $\{S_n\}$ は第 1 項が $S_1 = 4$，公比が 4 の等比数列であるから　$\boxed{\boldsymbol{S_n = 4^n}}$

(3)　(2) と同様に

$$\theta_k=\frac{2k-1}{2^{n+1}}\pi \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n-1})$$

とおくと，$0<\theta_k<\dfrac{\pi}{2}$ を満たし，与えられた不等式から

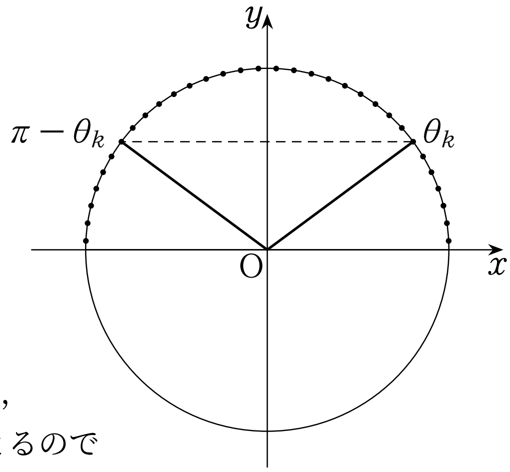
$$\frac{1}{\sin^2\theta_k}-1<\frac{1}{{\theta_k}^2}<\frac{1}{\sin^2\theta_k}$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n-1}$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta_k}-1\right)<\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\theta_k^2}<\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\sin^2\theta_k} \quad \cdots\cdots (*)$$

ここで，k の範囲を (2) の場合にして

$$\theta_k=\frac{2k-1}{2^{n+1}}\pi \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$$



とすると，$\sin(\pi-\theta_k)=\sin\theta_k$ より

$$\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(\pi-\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)}$$

となる．つまり，$k=1,\ \cdots,\ 2^n$ の 2^n 個の項について，
対称的に前半の 2^{n-1} 個と後半の 2^{n-1} 個は同じ値をとるので

$$S_n=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{\sin^2\theta_k}=2\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\sin^2\theta_k}$$

このことから

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\sin^2\theta_k}=\frac{S_n}{2}=\frac{4^n}{2}=\frac{2^{2n}}{2}=2^{2n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta_k}-1\right)=2^{2n-1}-2^{n-1}$$

また

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\theta_k^2}=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)^2}=\frac{2^{2n+2}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

(*) は

$$\left(2^{2n-1}-2^{n-1}\right)<\frac{2^{2n+2}}{\pi^2}T_n<2^{2n-1}$$

各辺に $\dfrac{\pi^2}{2^{2n+2}}$ を掛けて

$$\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2^{n+3}}\right)<T_n<\frac{\pi^2}{8}$$

よって，はさみうちの原理を用いて

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{\pi^2}{8}}$$

補 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
について，偶数項だけの級数を考えると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

ゆえに，奇数項だけの和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$