

数列 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$ を

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)}, \quad T_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

により定める. 次の問いに答えよ.

(1) $0 < \theta < \pi$ のとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{4}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

(2) S_n を n を用いて表せ.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ. ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

であることを用いて構わない.