O を原点とする座標平面において，3 点 E$(1,\,0)$，A$(0,\,s)$，B$(0,\,t)$ を考える．ただし，$s,\,t$ は実数で，$s<t$ とする．O を中心とする半径 1 の円を C とする．直線 EA と円 C の 2 つの交点のうち，E と異なる方を P とする．また，直線 EB と円 C の 2 つの交点のうち，E と異なる方を Q とする．次の問いに答えよ．

(1)　P の座標を s の式で表せ．

(2)　直線 EP と直線 OQ が垂直であるとき，t を s の式で表せ．

(3)　直線 EP と直線 OQ が垂直であり，$\angle\mathrm{EQP}=\dfrac{\pi}{3}$ となるとき，s と t を求めよ．

〔2026　大阪公立大 理系 前期〕

〔 **解答例** 〕

円 C： $x^2+y^2=1$　……①

(1)　直線 EA の方程式は

$$\mathrm{EA}：\ y=-sx+s \quad \cdots\cdots②$$

② を ① へ代入して

$$x^2+(-sx+s)^2=1$$

$$(1+s^2)x^2-2s^2x+(s^2-1)=0$$

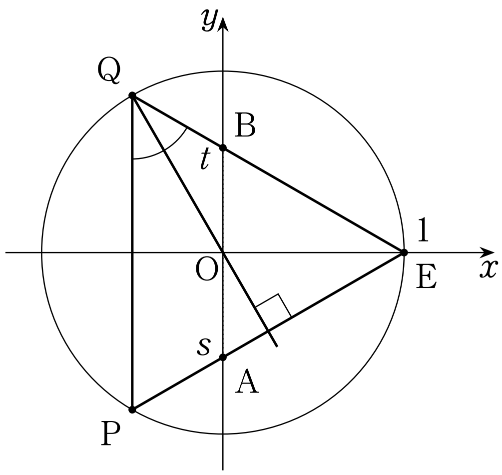
$$(x-1)\{(1+s^2)x-(s^2-1)\}=0$$

$x \neq 1$ となるのは　$x=\dfrac{s^2-1}{s^2+1}$

このとき，② から　$y=\dfrac{2s}{s^2+1}$

よって

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{s^2-1}{s^2+1},\ \frac{2s}{s^2+1}\right)}$$



(2)　(1) と同様にして　Q$\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\ \dfrac{2t}{t^2+1}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}} \,/\!/\, (-1,\,s)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \,/\!/\, (t^2-1,\,2t)$$

EP と直線 OQ が垂直である条件は　$\overrightarrow{\mathrm{EP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$　であるから

$$(-1,\,s)\cdot(t^2-1,\,2t)=0$$

$$-(t^2-1)+2st=0$$

$$t^2-2st-1=0$$

$$\therefore t=s\pm\sqrt{s^2+1}$$

よって　$s<t$　であるから　$\boxed{t=s+\sqrt{s^2+1}}$　……③

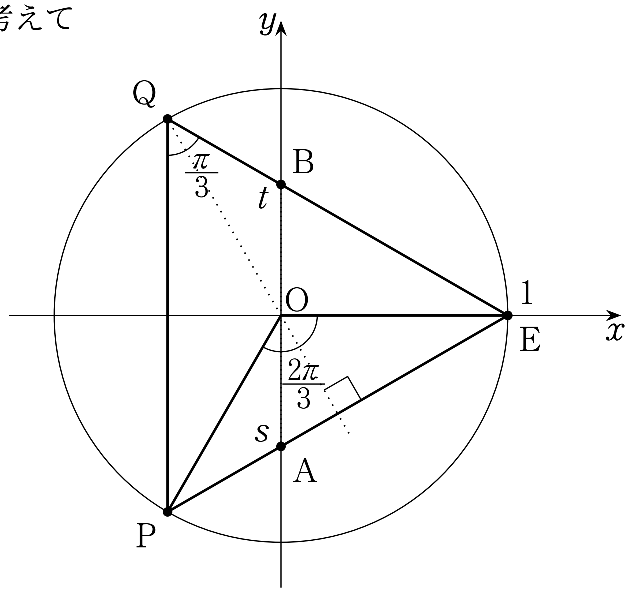
(3)　$\angle\mathrm{EQP}=\dfrac{\pi}{3}$ となるとき，$\overset{\frown}{\mathrm{EP}}$ に対する円周角の定理を用いて

$$\angle\mathrm{EOP}=2\angle\mathrm{EQP}=\frac{2\pi}{3}$$

ここで $\mathrm{OE}=\mathrm{OP}=1$ であり，かつ $s<0$ より P は第 4 象限にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right),\ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3 点 E, A, P は一直線上にあるから，傾きを考えて



$$-s=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore s=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

③ から　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$\boxed{\boldsymbol{s=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ t=\frac{1}{\sqrt{3}}}}$

参 $s=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと　$\mathrm{P}(\cos\alpha,\sin\alpha)$

参 $\angle\mathrm{EQP}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{1-3s^2}{1+3s^2}$$

参 $\triangle\mathrm{EPQ}$ は正三角形である．