xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする．
1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 または 4 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，5 または 6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む．
さいころを 6 回投げた後に P が到達する点の座標を (p, q) とする．次の問いに答えよ．
(1)　$p = 3$ となる確率を求めよ．
(2)　$q = 1$ となる確率を求めよ．
(3)　$8 \leqq 3p + 2q \leqq 10$ であるという条件のもとで，$p = 2$ となる確率を求めよ．
〔2026　大阪公立大 理系 前期〕

〔**解答例**〕
さいころを 1 回投げる試行で

出た目	P の移動	確率
1, 2	x 軸方向に $+1$ (X)	$\frac{1}{3}$
3, 4	y 軸方向に $+1$ (Y)	$\frac{1}{3}$
5, 6	y 軸方向に -1 (Z)	$\frac{1}{3}$

さいころを 6 回投げた後，X，Y，Z となる回数をそれぞれ a，b，c とすると

$$a + b + c = 6 \quad \cdots\cdots①$$

このとき，P が到達する点の座標を (p, q) とするので

$$(p, q) = (a,\ b - c)$$

(1)　$p = 3$ となるのは　$a = 3$　となる場合である．
よって，$p = 3$ となる確率は，さいころを 6 回投げて，X が 3 回，それ以外 (Y, Z) が 3 回起こる確率なので

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \boxed{\mathbf{\frac{160}{729}}}$$

(2)　$q = 1$ となるのは　$b - c = 1$ となる場合で，① も考えて，次の表のようになる．

a	b	c
5	1	0
3	2	1
1	3	2

よって，$q = 1$ となる確率は

$$\left({}_6\mathrm{C}_1 + \frac{6!}{3!2!1!} + \frac{6!}{1!3!2!}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^6 = (6 + 60 + 60)\cdot\frac{1}{729} = \frac{126}{729} = \boxed{\mathbf{\frac{14}{81}}}$$

(3)　2 つの事象を

$$A:\ 8 \leqq 3p+2q \leqq 10$$

$$B:\ p=2$$

とする．
また，事象 X が起こる確率を $P(X)$ と表すことにする．
$p=a$，$q=b-c$ であり，① から $a=6-b-c$ であるから

$$3p+2q=3a+2(b-c)=3(6-b-c)+2(b-c)=18-b-5c$$

A となるのは

$$8 \leqq 18-b-5c \leqq 10 \quad \text{すなわち} \quad 8 \leqq b+5c \leqq 10$$

このことから，次の表のようになる．

a	b	c	$b+5c$
2	3	1	8
1	4	1	9
0	5	1	10
4	0	2	10

ゆえに

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{6!}{2!3!1!}+\frac{6!}{1!4!1!}+{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2\right)\left(\frac{1}{3}\right)^6=(60+30+6+15)\left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= 111\left(\frac{1}{3}\right)^6 \end{aligned}$$

$A \cap B$ となるのは，上の表で $a=2$ となる $(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 1)$ のみであるから

$$P(A \cap B)=60\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

よって，A であるという条件のもとで，B となる確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{60}{111}=\boxed{\mathbf{\frac{20}{37}}}$$