α は実数で，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．方程式

$$\sqrt{\frac{x}{\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{\sin\alpha}} = 1$$

の表す曲線を C とする．曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれる部分を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を $V(\alpha)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$V(\alpha)$ を α を用いて表せ．

(2)　α が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くときの $V(\alpha)$ の最大値を求めよ．また，そのときの $\cos\alpha$ の値を求めよ．

〔2026　大阪公立大 理系 前期〕

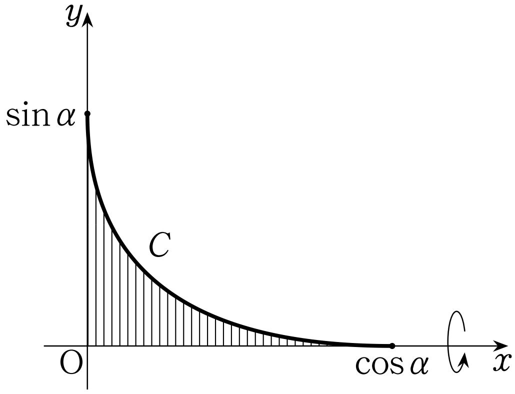
〔**解答例**〕

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$C : \sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{y}{\sin\alpha}} = 1$

(1)　C の定義域は $\alpha > 0, \sin\alpha > 0$ であるから　$x \geqq 0, y \geqq 0$

$y = 0$ とすると　$x = \cos\alpha$

$x = 0$ とすると　$y = \sin\alpha$



$$\sqrt{\frac{y}{\sin\alpha}} = 1 - \sqrt{\frac{x}{\cos\alpha}}$$

両辺を 2 乗して

$$\frac{y}{\sin\alpha} = \left(1 - \sqrt{\frac{x}{\cos\alpha}}\right)^2$$

すなわち

$$C : y = \sin\alpha\left(1 - \sqrt{\frac{x}{\cos\alpha}}\right)^2 \quad (0 \leqq x \leqq \cos\alpha)$$

C と x 軸および y 軸で囲まれる部分を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を $V(\alpha)$ は

$$V(\alpha) = \pi\int_0^{\cos\alpha} y^2\,dx = \pi\sin^2\alpha\int_0^{\cos\alpha}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{\cos\alpha}}\right)^4 dx$$

ここで

$$t = \sqrt{\frac{x}{\cos\alpha}} \quad \text{すなわち} \quad x = t^2\cos\alpha$$

とおくと

$$\frac{dx}{dt} = 2t\cos\alpha$$

x	$0 \to \cos\alpha$
t	$0 \to \quad 1$

より

$$V(\alpha)=\pi\sin^2\alpha\int_0^1(1-t)^4\cdot 2t\cos\alpha\,dt$$
$$=2\pi\cos\alpha\,\sin^2\alpha\int_0^1 t(1-t)^4\,dt$$

ここで

$$\int_0^1 t(1-t)^4\,dt=\int_0^1\{(t-1)+1\}(t-1)^4\,dt=\int_0^1\{(t-1)^5+(t-1)^4\}\,dt$$
$$=\left[\frac{(t-1)^6}{6}+\frac{(t-1)^5}{5}\right]_0^1=-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}$$
$$=\frac{1}{30}$$

ゆえに

$$V(\alpha)=2\pi\cos\alpha\,\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{30}=\frac{\pi}{15}\cos\alpha\,\sin^2\alpha$$

よって

$$\boxed{\boldsymbol{V(\alpha)=\frac{\pi}{15}\cos\alpha\,\sin^2\alpha}}$$

(2)　(1) より

$$V(\alpha)=\frac{\pi}{15}\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$$

$\cos\alpha=u$　とおくと　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$　なので　$0<u<1$

$$V(\alpha)=\frac{\pi}{15}u(1-u^2)$$

$$f(u)=u(1-u^2)=u-u^3$$

とおくと

$$V(\alpha)=\frac{\pi}{15}f(u)$$

$$f'(u)=1-3u^2$$

$f(u)$ の増減は次の表のようになる．

u	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

よって，$f(u)$ は $u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ をとり，そのとき $V(\alpha)$ も最大となる．

このとき，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって $\boxed{\boldsymbol{V(\alpha)}\ \textbf{の最大値}\ \boldsymbol{\dfrac{2\pi}{45\sqrt{3}}\left(\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}}$