

第4問～第7問は、いずれか3問を選択し、解答しなさい。

第4問 (選択問題) (配点 16)

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ を、 $\{a_n\}$ の階差数列という。

- (1) $\{a_n\}$ の初項は1とする。また、 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が

$$b_n = 4n - 1$$

で表されたとする。

- (i) $b_1 = \boxed{\text{ア}}$ であるから、 $a_2 = \boxed{\text{イ}}$ となる。さらに、 $b_2 = \boxed{\text{ウ}}$ であるから、 $a_3 = \boxed{\text{エオ}}$ となる。

(数学Ⅱ，数学B，数学C第4問は次ページに続く。)

(ii) n を 2 以上の自然数とする。このとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\boxed{\text{力}}} b_k \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つことから

$$a_n = \boxed{\text{キ}} n^2 - \boxed{\text{ク}} n + \boxed{\text{ケ}}$$

であることがわかる。

$\boxed{\text{力}}$ の解答群

- | | | | |
|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $\textcircled{0} \quad n - 1$ | $\textcircled{1} \quad n$ | $\textcircled{2} \quad n + 1$ | $\textcircled{3} \quad n + 2$ |
|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

(数学Ⅱ，数学B，数学C第4問は次ページに続く。)

力

(2) 太郎さんは、①を変形すると $\sum_{k=1} b_k = a_n - a_1$ となることから、数列の和を求めるために次のことを考えた。

発想

ある数列 $\{d_n\}$ の和を求めたいときは、数列 $\{c_n\}$ で、 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるものを見つけられればよい。

太郎さんは、この発想に基づいて、一般項が

$$d_n = (2n + 1) \cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めることにした。

数列 $\{c_n\}$ で、 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるもの、すなわち

$$(2n + 1) \cdot 2^n = c_{n+1} - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となるものを見つけたい。太郎さんは、 $\{d_n\}$ の一般項が n の 1 次式と 2^n の積であることから、 $\{c_n\}$ の一般項が

$$c_n = (pn + q) \cdot 2^n$$

と表されるのではないかと考えた。ここで、 p, q は定数である。このとき、 $c_{n+1} - c_n$ を n, p, q を用いて表すと

$$c_{n+1} - c_n = \left\{ \boxed{\text{コ}} n + \boxed{\text{サ}} \right\} \cdot 2^n$$

となる。

よって、 $p = \boxed{\text{シ}}$ ， $q = \boxed{\text{スセ}}$ のとき ② が成り立つ。

(数学Ⅱ，数学B，数学C第4問は次ページに続く。)

以上のことから，すべての自然数 n について，数列 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n d_k = \left(\boxed{\text{ソ}} \right) \cdot 2^{n+1} + \boxed{\text{タ}}$$

となることがわかる。

， の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|-----------|------------|------------|------------|
| ① p | ② q | ③ $2p$ | ④ $2q$ |
| ⑤ $(p+q)$ | ⑥ $(2p+q)$ | ⑦ $(p+2q)$ | ⑧ $2(p+q)$ |

の解答群

- | | | |
|----------|----------|----------|
| ① $n-1$ | ② $n+1$ | ③ $2n-3$ |
| ④ $2n-1$ | ⑤ $2n+1$ | ⑥ $2n+3$ |

(数学Ⅱ，数学B，数学C第4問は次ページに続く。)

(3) 花子さんは、一般項が

$$d_n = (n^2 - n - 1) \cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めることにした。(2)の発想に基づいて考えると、すべての自然数 n について、 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n d_k = \left(\boxed{\text{チ}} \right) \cdot 2^{n+1} - \boxed{\text{ツ}}$$

となることがわかる。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| ① $3n - 3$ | ② $3n + 3$ | ③ $5n - 7$ |
| ④ $5n + 7$ | ⑤ $n^2 - n - 1$ | ⑥ $n^2 + n + 1$ |
| ⑦ $n^2 + 3n - 3$ | ⑧ $n^2 - 3n + 3$ | ⑨ $n^2 + 5n - 7$ |
| ⑩ $n^2 - 5n + 7$ | | |