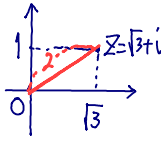


第7問 (選択問題) (配点 16)

z を 0 でない複素数とし, $w = z + \frac{1}{z}$ とする. また, r を正の実数とし, 複素数平面上で, 原点 O を中心とする半径 r の円を C とする.



(1) $z = \sqrt{3} + i$ のとき, $|z| =$ 2 であり

$$w = \frac{\sqrt{5}}{4} \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}i$$

(Handwritten notes: 5, 3, 4, 3, 4, 2 points)

である.

$z = \sqrt{3} + i$

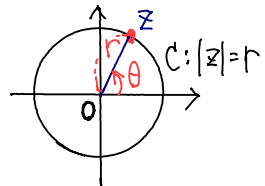
∴ $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} - i}{4}$

$W = z + \frac{1}{z} = \sqrt{3} + i + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

(2) z が C 上を動くとき, w が複素数平面上で描く図形を考える.

実数 θ を z の偏角とし, 極形式を用いて $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表す.



(i) $w = z + \frac{1}{z}$ を r, θ を用いて表すと

$$w = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad \dots\dots\dots ①$$

である. したがって, θ の値によらず () = 0 となるような r の値は

1 である.

$w = z + \frac{1}{z} = r \cos \theta + (r \sin \theta) i + \frac{1}{r} \cos \theta + \left(-\frac{1}{r} \sin \theta \right) i$

$= \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$

キ, ク の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | |
|--|--|
| ① $2r \cos \theta$ | ① $2r \sin \theta$ |
| ② $(r + 1) \cos \theta$ | ③ $(r + 1) \sin \theta$ |
| ④ $(r - 1) \cos \theta$ | ⑤ $(r - 1) \sin \theta$ |
| ⑥ $\left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta$ | ⑦ $\left(r + \frac{1}{r} \right) \sin \theta$ |
| ⑧ $\left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \theta$ | ⑨ $\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$ |

θ によらず

$\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = 0$

∴ $r - \frac{1}{r} = 0$

$r = \frac{1}{r}$

$r^2 = 1$

$r > 0$ な $r = 1$

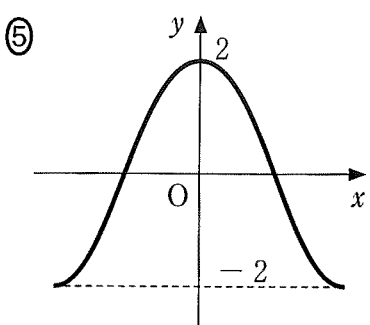
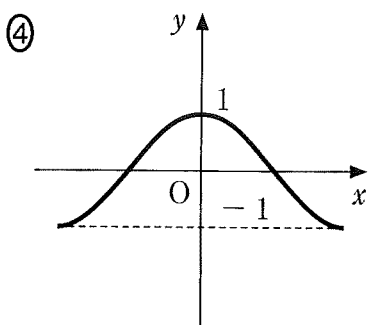
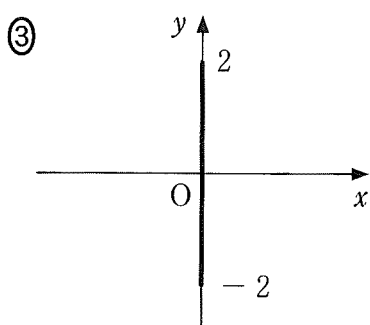
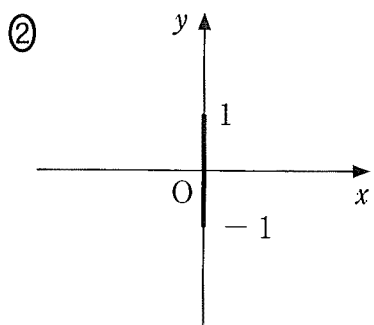
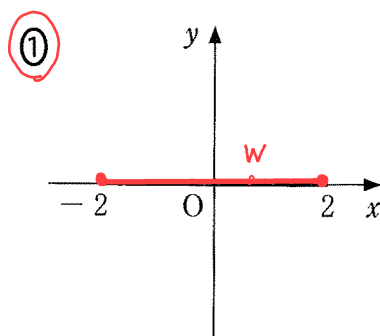
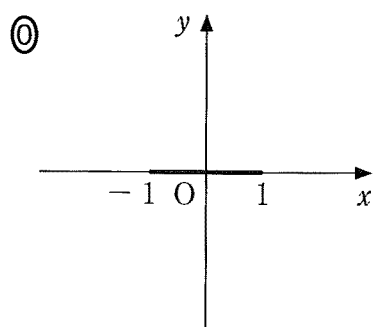
∴ $r = 1$

∴ w の虚部は θ によらず 0

$w = 2 \cos \theta$ ← w は実数

(ii) $r = \boxed{1}$ とする。 z が C 上を動くとき、 w が描く図形は $\boxed{①}$ である。
コ (2点)

$\boxed{コ}$ については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。



$$r = 1 \text{ と } z = e^{i\theta}$$

$$w = 2 \cos \theta$$

$$w = x + yi$$

(x, y は実数)

よって

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 0 \end{cases}$$

任意の θ に対して

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

よって

$$-2 \leq 2 \cos \theta \leq 2$$

すなわち

$$-2 \leq x \leq 2$$

よって w が描く図形は

実軸上の 2 点 $-2, 2$ を

結ぶ線分



(iii) $r \neq$ 1 とする。 x, y を実数として $w = x + yi$ とおくと、① から

$$x = \boxed{}, \quad y = \boxed{} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$(r + \frac{1}{r}) \cos \theta$
 $(r - \frac{1}{r}) \sin \theta$

が成り立つ。②の二つの式から θ を消去すると、 x, y は ② を満たし、 $\frac{x^2}{(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{(r - \frac{1}{r})^2} = 1$ (2点)

z が C 上を動くとき、 $w = x + yi$ は ② の表す図形を描く。

$$\frac{x^2}{(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{(r - \frac{1}{r})^2} = 1$$

$r \neq 1$ とし

$$w = x + yi \quad (x, y \text{ は実数})$$

とおくと、①から

$$\begin{cases} x = (r + \frac{1}{r}) \cos \theta \\ y = (r - \frac{1}{r}) \sin \theta \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r + \frac{1}{r}} \\ \sin \theta = \frac{y}{r - \frac{1}{r}} \end{cases}$$

これを

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

へ代入して

$$\left(\frac{x}{r + \frac{1}{r}} \right)^2 + \left(\frac{y}{r - \frac{1}{r}} \right)^2 = 1 \quad \text{すなわち}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{(r - \frac{1}{r})^2} = 1} \quad \textcircled{2}$$

z が C 上を動くとき、 r は θ によらない定数である、
($r > 0, r \neq 1$)

よって、 $w = x + yi$ は

$$\frac{x^2}{(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{(r - \frac{1}{r})^2} = 1$$

の表す楕円を描く

サ の解答群

⑥ $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

① $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1$

② $\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$

③ $\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$

④ $\frac{x^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} = 1$

⑤ $\frac{x^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} = 1$

(3) $r \neq$ 7 とする。 z が C 上を動くとき、 w^2 が描く図形を考えよう。

(i) w^2 を z を用いて表すと、 $w^2 =$ ③ である。

$$w = z + \frac{1}{z}$$

より $w^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \underbrace{z^2 + \frac{1}{z^2} + 2}_{x+yi}$ ③シ

シ の解答群

② $z^2 + \frac{1}{z^2}$

① $z^2 + \frac{1}{z^2} + 1$

② $z^2 + \frac{1}{z^2} - 1$

③ $z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$

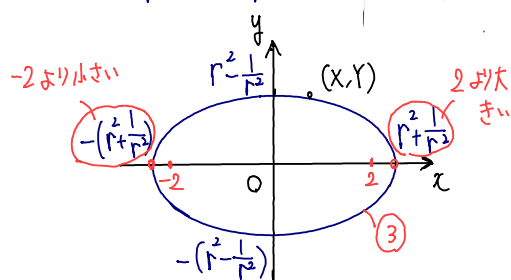
④ $z^2 + \frac{1}{z^2} - 2$

⑤ $z^2 + \frac{1}{z^2} + 2i$

(ii) z が C 上を動くとき、 $z^2 + \frac{1}{z^2}$ が描く図形の方程式を考える。このとき、 z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描く。このことから、 X, Y を実数として $z^2 + \frac{1}{z^2} = X + Yi$ とおくと、 X, Y は ② を満たす。以上を踏まえると、 w^2 が描く図形は ③ であることがわかる。

② $|z^2| = r^2$
より (2) (iii) $z = r e^{i\theta}$ とて $z^2 + \frac{1}{z^2} = X + Yi$
とおくと $\frac{X^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1$...③
②ス

さらに
これは 原点 O が中心の楕円
 $r^2 + \frac{1}{r^2} > r^2 - \frac{1}{r^2}$ なので下図のようになる。



$$w^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 = X + Yi + 2$$

よって、 w^2 が描く図形は
③を実軸方向に2だけ平行移動した楕円なので ③または⑤になる
ここで、 $r^2 > 0, \frac{1}{r^2} > 0$ より相加相乗平均の大小関係を用いて

$$r^2 + \frac{1}{r^2} \geq 2\sqrt{r^2 \cdot \frac{1}{r^2}} = 2$$

等号成立は $r^2 = \frac{1}{r^2}$ であるが $r > 0$ かつ $r \neq 1$ なので成り立たない
すなわち $r^2 + \frac{1}{r^2} > 2$ なので $2 - (r^2 + \frac{1}{r^2}) < 0$
よって、 w^2 が描く図形は ③ 也

補

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta - i\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = X + Yi$$

$$\begin{cases} X = \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta \\ Y = \left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \frac{X}{r^2 + \frac{1}{r^2}} \\ \sin 2\theta = \frac{Y}{r^2 - \frac{1}{r^2}} \end{cases}$$

$$\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$$

へ代入する。

ス の解答群

② $\frac{X}{r^2 + \frac{1}{r^2}} + \frac{Y}{r^2 - \frac{1}{r^2}} = 1$

① $\frac{X^2}{r^4} + \frac{Y^2}{r^4} = 1$

② $\frac{X^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

③ $\frac{X^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

④ $\frac{X^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

⑤ $\frac{X^2}{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

セについては、最も適当なものを、次の①～⑦のうちから一つ選べ。

