

第6問 (選択問題) (配点 16)

平面上に、 $\triangle ABC$ と点 M がある。

(1) 次の等式を満たす点 P を考える。

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

3点 A, B, C を図1の位置にとる。ただし、図1における $\triangle ABC$ は正三角形、六角形 $DEFGCA$ は正六角形である。

- M が A と一致するとき、 P は と一致する。
Bア (2点)
- M が D と一致するとき、 P は と一致する。
イ (2点)

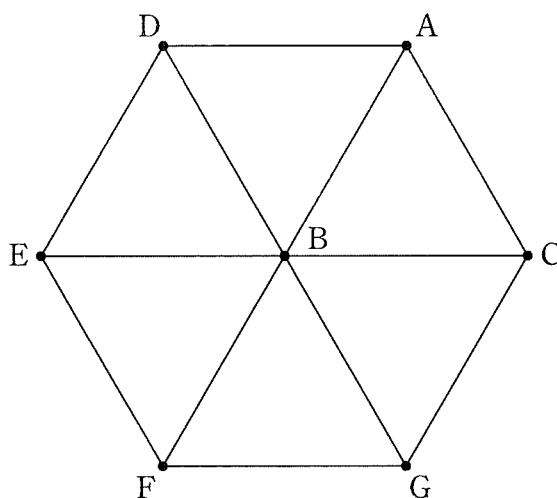


図 1

① $M=A$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{0} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad \textcircled{2} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

点 P は線分 BC を 1:2 に外分する点 E と一致

よって $P = \text{E}$ ④ア

② $M=D$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

よって $P = \text{B}$ ①イ

,

- ① A ☒ ① B ② C ③ D ☒ ④ E ⑤ F ⑥ G

↑
頭としほを
つなげは求まる
けど、式変形
しておいた

(2) a, b, c を実数とする。次の等式を満たす点 P を考える。

$$\overrightarrow{MP} = a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} \quad \dots\dots\dots ②$$

花子さんと太郎さんは、(1)の考察から、 P の位置について話している。

花子：①は $a = 1, b = 2, c = -1$ の場合だね。(1)で考えた二つの場合では、 M の位置によって P の位置が異なるね。

太郎：でも、 $a = 1, b = 0, c = 0$ の場合だと、②は $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA}$ となるから、 M がどの位置にあっても、 P は A と一致するよ。

花子： P の位置が変わらないのは、どのようなときかな。

ここでは

M がどの位置にあっても、②を満たす P の位置が変わらないための a, b, c の条件を調べよう。

$$(②の左辺) = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} \quad (②) \rightarrow$$

②の両辺を、 A を始点とするベクトルを用いて表すと、左辺は

$$\overrightarrow{MP} = \boxed{(2)} \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} \quad (②の左辺) \quad \text{ア(1点)}$$

$$(②の右辺) = -a(-\overrightarrow{AM}) + b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$$

$$= \text{イ} \overrightarrow{AB} + \text{エ} \overrightarrow{AC} + \text{カ} \overrightarrow{AM} \quad \text{イ(1点), エ(2点), カ(2点)}$$

となり、右辺は

$$a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = \boxed{(1)} \overrightarrow{AB} + \boxed{(2)} \overrightarrow{AC} + \boxed{(7)} \overrightarrow{AM} \quad \text{エ(1点), オ(2点), カ(2点)}$$

となる。したがって、②は

$$\overrightarrow{AP} = \boxed{(1)} \overrightarrow{AB} + \boxed{(2)} \overrightarrow{AC} + \boxed{(9)} \overrightarrow{AM} \quad \text{キ(1点), ク(2点), ケ(2点)}$$

と変形できる。

よって、 M がどの位置にあっても、②を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は $\boxed{(7)}$ である。

コ(2点)

$$1 - a - b - c = 0 \quad \leftarrow \overrightarrow{AM} \text{の係数を0}$$

すなわち

$$\boxed{a + b + c = 1} \quad (7)$$

このとき

$$\overrightarrow{AP} = \text{イ} \overrightarrow{AB} + \text{エ} \overrightarrow{AC} \quad \dots (8)$$

と表せて M によらず P の位置は変わらない

$$(②) \text{は} \quad \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \text{イ} \overrightarrow{AB} + \text{エ} \overrightarrow{AC} + (-a-b-c) \overrightarrow{AM}$$

$$\text{すなわち} \quad \overrightarrow{AP} = \text{イ} \overrightarrow{AB} + \text{エ} \overrightarrow{AC} + \text{ケ} \overrightarrow{AM}$$

ウ の解答群

- ② $\vec{AP} + \vec{AM}$ ① $-\vec{AP} + \vec{AM}$ ② $\vec{AP} - \vec{AM}$ ③ $-\vec{AP} - \vec{AM}$

エ ~ ケ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ② a ① b ② c
③ $(a + b + c)$ ④ $(-a + b + c)$ ⑤ $(a - b + c)$
⑥ $(a + b - c)$ ⑦ $(-a - b - c)$ ⑧ $(1 + a + b + c)$
⑨ $(1 - a - b - c)$

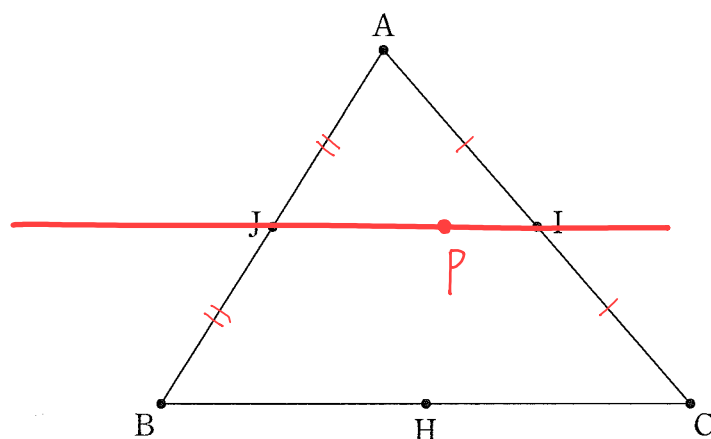
コ の解答群

- ② $a = b$ ① $b = c$ ② $c = a$
③ $a + b - c = 0$ ④ $a - b + c = 1$ ⑤ $-a + b + c = -1$
⑥ $a + b + c = 0$ ⑦ $a + b + c = 1$ ⑧ $a + b + c = -1$

(3) a, b, c を, $\boxed{}$ を満たす実数とする。様々な条件のもとで, ② を満たす点 P が存在する範囲を調べよう。

(i) a, b, c が, $\boxed{}$ と $a = \frac{1}{2}$ を満たすとき, P が存在する範囲は

$\boxed{\textcircled{4}}$ である。ただし, $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を H , 辺 CA の中点を I , 辺 AB の中点を J とする。



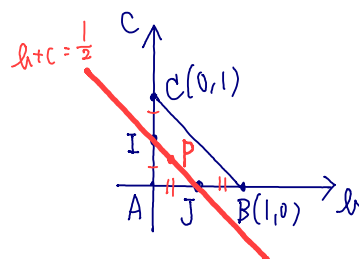
参考図

$a+b+c=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$
 a と $b+c=\frac{1}{2}$ かわら $2b+2c=1$
 をみたす。
 このとき, $(*)$ は
 $\vec{AP} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$
 $= b \cdot 2\vec{AJ} + c \cdot 2\vec{AI}$
 $= 2b\vec{AJ} + 2c\vec{AI}$
 みたす
 よて, 点 P の存在する範囲は
直線 IJ $\textcircled{4}$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- | | | |
|-----------|---------------------------|-----------|
| ① 直線 AH | ② 直線 BI | ③ 直線 CJ |
| ④ 直線 HI | $\textcircled{4}$ 直線 IJ | ⑤ 直線 JH |

$\textcircled{\text{補}}$ 斜交座標で考える
 $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$ とすると $P(b,c)$
 このとき $J(\frac{1}{2},0), I(0,\frac{1}{2})$

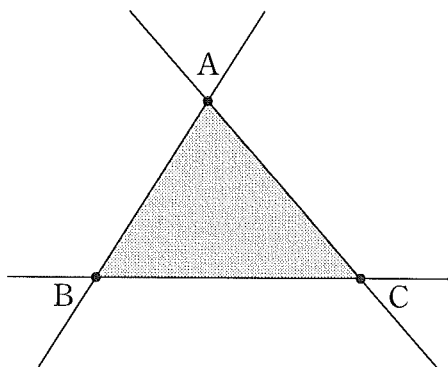


(ii) a, b, c が, $\boxed{}$ と $c < 0$ を満たすとき, P が存在する範囲を図示する

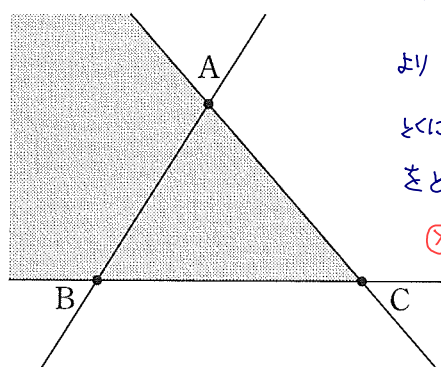
と, $\boxed{\textcircled{3}}$ の灰色部分となる。ただし, 境界線を含まない。
シ(3点)

$\boxed{\text{シ}}$ については, 最も適当なものを, 次の①～⑤のうちから一つ選べ。

①



②



$a+b+c=1, c<0$
をみたすとき
 $c=1-a-b<0$
より $a+b>1$
とくに b は実数全体の値
をとれる。

⊗ から

$$\vec{AP} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$$

と表せるが

$$c\vec{AC} = \vec{AK}$$

とおくと $c<0$ より

点 K は直線 AC 上の
点 A からの半直線 AC 上
にはない部分にある
このとき

$$\vec{AP} = b\vec{AB} + \vec{AK}$$

$$\vec{AP} - \vec{AK} = b\vec{AB}$$

$$\vec{KP} = b\vec{AB}$$

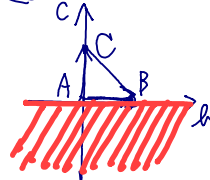
と表せば, 点 P は
点 K を通り, 直線 AB に

平行な直線上
に存在する,

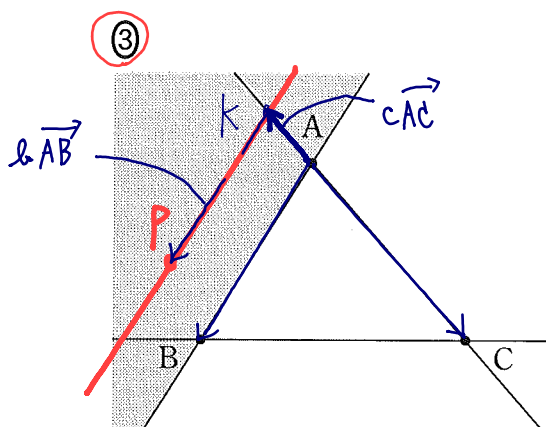
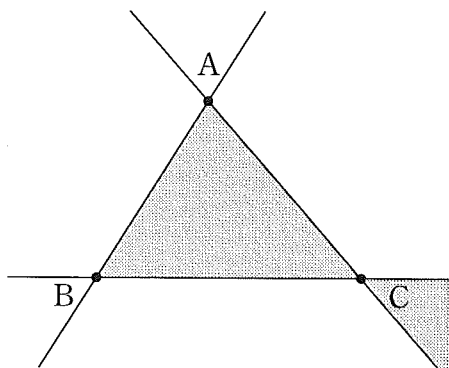
以上のことから

$\boxed{\textcircled{3}}$ シ

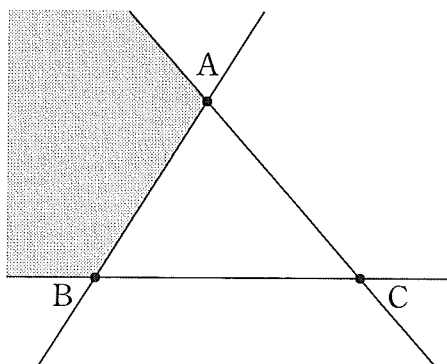
③ 斜交座標下と



③



④



⑤

