

第4問 (選択問題) (配点 16)

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ を, $\{a_n\}$ の階差数列という。

- (1) $\{a_n\}$ の初項は1とする。また, $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が

$$b_n = 4n - 1$$

で表されるとする。

- (i) $b_1 = \boxed{3}$ であるから, $a_2 = \boxed{4}$ となる。さらに, $b_2 = \boxed{7}$ であるから, $a_3 = \boxed{11}$ となる。
ア (2点) イ (2点) ウ

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & , & a_{n+1} \\
 1 & \boxed{4} & \boxed{11} & \dots & & & \\
 \swarrow & \searrow & \swarrow & & \swarrow & & \\
 b_1 & b_2 & & & b_n & & \\
 \parallel & \parallel & & & \parallel & & \\
 \boxed{3} & \boxed{7} & & & 4n-1 & & \\
 \text{ア} & \text{ウ} & & & & &
 \end{array}$$

$$a_1 = 1$$

$$b_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 3 = 4$$

$$b_2 = 7$$

$$a_3 = a_2 + b_2 = 4 + 7 = 11$$

(ii) n を 2 以上の自然数とする。このとき

$$a_n = a_1 + \overset{n-1}{\boxed{0}} \text{カ} \sum_{k=1} b_k \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つことから

$$a_n = \boxed{2} n^2 - \boxed{3} n + \boxed{2}$$

キ ク ケ (2点)

であることがわかる。

カ の解答群

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 0 $n - 1$ | 1 n | 2 $n + 1$ | 3 $n + 2$ |
|---|---|---|---|

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_1 + \overset{\textcircled{0}\text{カ}}{\sum_{k=1}^{n-1}} b_k \end{aligned}$$

$$a_1 = 1, \quad b_n = 4n - 1 \text{ となる}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 1) \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= 2n^2 - 3n + 2 \end{aligned}$$

$n=1$ とすると $a_1 = 1$ となるので $n=1$ のときも成り立つ

よって

$$a_n = \boxed{2n^2 - 3n + 2}$$

キ ク ケ

n-1 力

(2) 太郎さんは、①を変形すると $\sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_n - a_1$ となることから、数列の和を

求めるために次のことを考えた。

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \dots + (\cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}}) = a_n - a_1$$

発想

ある数列 $\{d_n\}$ の和を求めたいときは、数列 $\{c_n\}$ で、 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるものを見つけられればよい。

太郎さんは、この発想に基づいて、一般項が

$$d_n = (2n + 1) \cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めることにした。

数列 $\{c_n\}$ で、 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるもの、すなわち

$$(2n + 1) \cdot 2^n = c_{n+1} - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となるものを見つけたい。太郎さんは、 $\{d_n\}$ の一般項が n の 1 次式と 2^n の積であることから、 $\{c_n\}$ の一般項が

$$c_n = (pn + q) \cdot 2^n$$

と表されるのではないかと考えた。ここで、 p, q は定数である。このとき、 $c_{n+1} - c_n$ を n, p, q を用いて表すと

$$c_{n+1} - c_n = \left\{ \overset{p}{\boxed{0}} n + \overset{2p+q}{\boxed{5}} \right\} \cdot 2^n$$

0 コ5 サ (2点)

となる。

よって、 $p = \boxed{2}$ シ、 $q = \boxed{-3}$ ステ (1点) のとき ② が成り立つ。

$$\begin{aligned} c_n &= (pn + q) \cdot 2^n \quad \dots \textcircled{3} \\ \text{とすると} \quad c_{n+1} &= \{p(n+1) + q\} \cdot 2^{n+1} = (pn + p + q) \cdot 2 \cdot 2^n \\ &= (2pn + 2p + 2q) 2^n \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

④ - ③ とし

$$c_{n+1} - c_n = \boxed{(pn + 2p + q)} 2^n$$

0 コ5 サ

② となすとは

$$2n + 1 = pn + 2p + q$$

n の係数等式なので

$$\begin{aligned} p &= 2 \\ 2p + q &= 1 \\ \therefore \quad p &= 2, q = -3 \end{aligned}$$

2 シ-3 ステ

③ から

$$c_n = (2n - 3) \cdot 2^n$$

$$c_1 = -2$$

と表せば

$$d_n = c_{n+1} - c_n$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n d_k &= \sum_{k=1}^n (c_{k+1} - c_k) \\ &= (\cancel{c_2} - \cancel{c_1}) + (\cancel{c_3} - \cancel{c_2}) + \dots + (\cancel{c_{n+1}} - \cancel{c_n}) \\ &= c_{n+1} - c_1 \\ &= \{2(n+1) - 3\} \cdot 2^{n+1} - (-2) \\ &= \boxed{(2n-1) \cdot 2^{n+1} + 2} \end{aligned}$$

0 コ5 サ

以上のことから、すべての自然数 n について、数列 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n d_k = \left(\boxed{\text{③}} \right) \cdot 2^{n+1} + \boxed{2}$$

ソ タ (2点)

となることがわかる。

前ページ

☐ コ, ☐ サ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|-----------|------------|------------|------------|
| ① p | ② q | ③ $2p$ | ④ $2q$ |
| ⑤ $(p+q)$ | ⑥ $(2p+q)$ | ⑦ $(p+2q)$ | ⑧ $2(p+q)$ |

☐ ソ の解答群

- | | | |
|----------|----------|----------|
| ① $n-1$ | ② $n+1$ | ③ $2n-3$ |
| ④ $2n-1$ | ⑤ $2n+1$ | ⑥ $2n+3$ |

① $S_n = \sum_{k=1}^n d_k = \sum_{k=1}^n (2k+1) \cdot 2^k$

等差 等比

← よくやろ和の求め方

とあくと

$$S_n = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \dots + (2n+1) \cdot 2^n$$

$$- 2S_n = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \dots + (2n-1) \cdot 2^n + (2n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$-S_n = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + 2 \cdot 2^n - (2n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 6 + \frac{2 \cdot 2^2 (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (2n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 6 + 2 \cdot 2^{n+1} - 8 - (2n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= (-2n+1) \cdot 2^{n+1} - 2$$

2 × (-1)

よって $S_n = \boxed{(2n-1) \cdot 2^{n+1} + 2}$

初項 $2 \cdot 2^2$
公比 2
項数 $n-1$
の等比数列の和

(3) 花子さんは、一般項が

$$d_n = (n^2 - n - 1) \cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めることにした。(2) の発想に基づいて考えると、すべての自然数 n について、 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n d_k = \left(\boxed{\textcircled{7}} \right) \cdot 2^{n+1} - \boxed{6}$$

チ ツ (4点)

となることがわかる。

チ の解答群

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| ① $3n - 3$ | ④ $3n + 3$ | ⑦ $5n - 7$ |
| ② $5n + 7$ | ⑤ $n^2 - n - 1$ | ⑧ $n^2 + n + 1$ |
| ③ $n^2 + 3n - 3$ | ⑥ $n^2 - 3n + 3$ | ⑨ $n^2 + 5n - 7$ |
| ④ $n^2 - 5n + 7$ | | |

$$C_n = (pn^2 + qn + r) \cdot 2^n \quad \dots \textcircled{5}$$

とすると

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \{p(n+1)^2 + q(n+1) + r\} \cdot 2^{n+1} \\ &= \{pn^2 + (2p+q)n + p+q+r\} \cdot 2 \cdot 2^n \\ &= \{2pn^2 + (4p+2q)n + 2p+2q+2r\} \cdot 2^n \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

⑥ - ⑤ とし $C_{n+1} - C_n = \{pn^2 + (4p+q)n + 2p+2q+r\} \cdot 2^n$

$$d_n = (n^2 - n - 1) \cdot 2^n$$

$$d_n = C_{n+1} - C_n$$

とすると

$$\begin{cases} p = 1 \\ 4p + q = -1 \\ 2p + 2q + r = -1 \end{cases}$$

$$\therefore p = 1, q = -5, r = 7$$

⑤ から $C_n = (n^2 - 5n + 7) \cdot 2^n$

$$C_1 = 3 \cdot 2 = 6$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n d_k &= \sum_{k=1}^n (C_{k+1} - C_k) = C_{n+1} - C_1 = \{(n+1)^2 - 5(n+1) + 7\} \cdot 2^{n+1} - 6 \\ &= \boxed{(n^2 - 3n + 3) \cdot 2^{n+1} - 6} \end{aligned}$$

⑦チ ツ