

第3問 (必答問題) (配点 22)

(1) k を実数とし、3次関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$ を考える。

- (i) $f'(x) = \boxed{2} x^2 - 4x + 3$ である。
 $x = \boxed{1}$ のとき、 $f(x)$ は極大値 $\boxed{9}$ をとる。
 $x = \boxed{3}$ のとき、 $f(x)$ は極小値 $\boxed{5}$ をとる。

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$
 $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ (2)ア
 $= (x-1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ とし $x = 1, 3$

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

 $x = \boxed{1}$ のとき 極大値 $f(1) = \boxed{\frac{4}{3} + k}$ (9)ア
 $x = \boxed{3}$ のとき 極小値 $f(3) = \boxed{k}$ (5)エ

☐ ア の解答群

- | | |
|--|---------------------------------------|
| ① $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ | ① $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 + k$ |
| ② $x^2 - 4x + 3$ | ③ $x^2 - 4x + 3 + k$ |
| ④ $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx$ | ⑤ $\frac{1}{3}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + kx$ |

☐ ウ, ☐ オ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | | |
|-------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| ① 0 | ① 1 | ② 2 | ③ $\frac{2}{3}$ | ④ $\frac{4}{3}$ |
| ⑤ k | ⑥ $-\frac{4}{3} + k$ | ⑦ $-\frac{2}{3} + k$ | ⑧ $\frac{2}{3} + k$ | ⑨ $\frac{4}{3} + k$ |

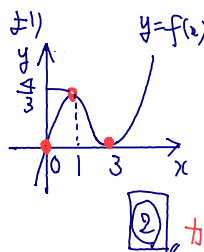
(ii) $y = f(x)$ のグラフの概形は

$k = 0$ のとき ☐ (2) カ (2点)

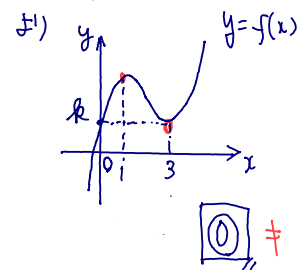
$k > 0$ のとき ☐ (0) キ (2点)

である。

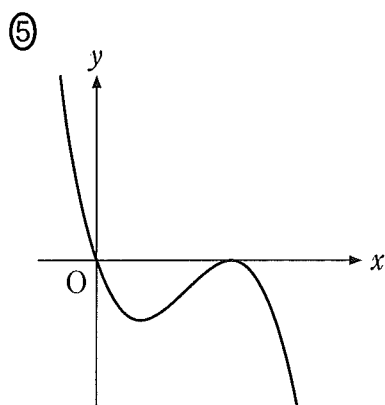
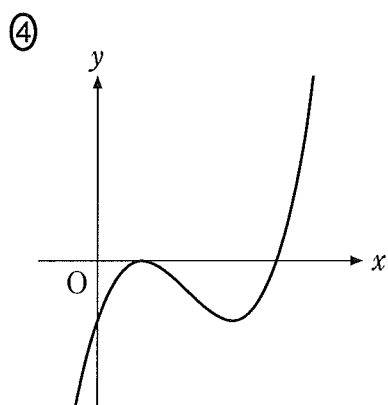
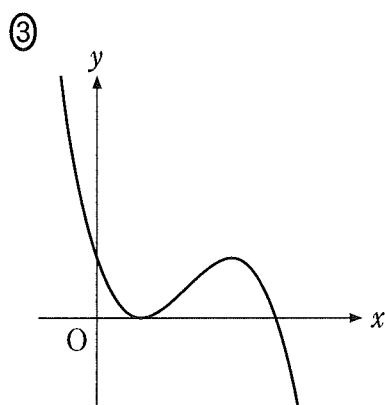
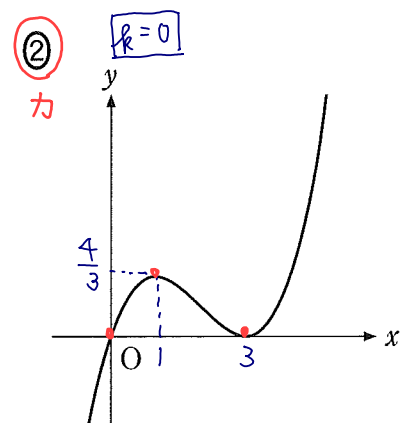
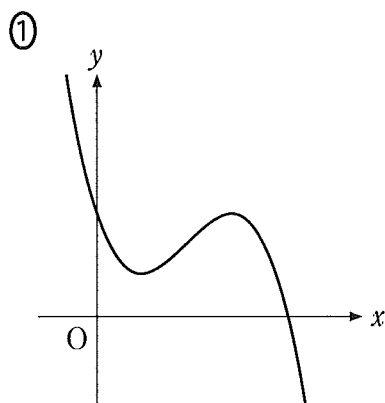
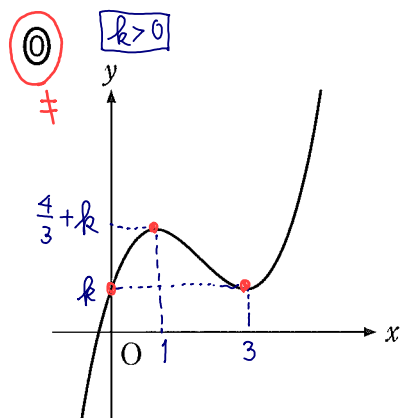
$k = 0$ のとき
 $f(1) = \frac{4}{3}$
 $f(3) = 0$
 $f(0) = 0$



$k > 0$ のとき
 $f(1) = \frac{4}{3} + k > \frac{4}{3}$
 $f(3) = k > 0$
 $f(0) = k > 0$



カ， キ については，最も適当なものを，次の①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(iii) (i)で求めた $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ のうち、小さい方の数を a とする。

$f(0) < 0 < f(a)$ を満たすような k の値の範囲は $\boxed{-\frac{4}{3}}$ $< k < \boxed{0}$ である。
7 (2点)

k は $\boxed{-\frac{4}{3}}$ $< k < \boxed{0}$ を満たすとする。 $0 \leq x \leq a$ の範囲において、
 $f(x) = 0$ を満たす x の値を β とおく。 $0 \leq x \leq \beta$ の範囲における $y = f(x)$ の
 グラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積と、 $\beta \leq x \leq a$ の範囲における
 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積が等しいとす
 る。

このとき、 $\int_0^a f(x) dx = 0$
 $\boxed{1}$ が成り立つ。したがって、 $k = \frac{\boxed{-11}}{\boxed{12}}$ である。
コ (2点) サシ テシ (2点)

$a=1$ とき

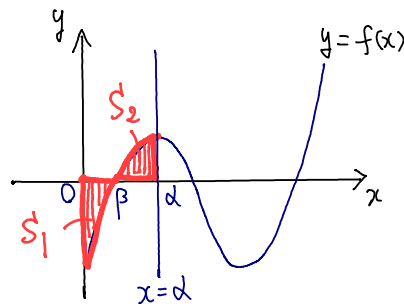
$$f(0) < 0 < f(1)$$

をみたすのは

$$k < 0 < \frac{4}{3} + k$$

$$\therefore \boxed{-\frac{4}{3} < k < 0}$$

⑧ ⑨



右図より

$$S_1 = \int_0^{\beta} -f(x) dx = -\int_0^{\beta} f(x) dx$$

$$S_2 = \int_{\beta}^a f(x) dx$$

$$S_1 = S_2 \text{ であるから } -\int_0^{\beta} f(x) dx = \int_{\beta}^a f(x) dx$$

$$\therefore \int_0^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^a f(x) dx = 0$$

$$\therefore \boxed{\int_0^a f(x) dx = 0} \quad \text{①}$$

$f(x) < 0$ の面積を借金
 $f(x) > 0$ の面積を頂金
 とすると ① と ② で持ち金 0

$a=1$ とき

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + k \\ &= \frac{1-8+18}{12} + k \\ &= \frac{11}{12} + k = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{k = -\frac{11}{12}} \quad \text{サシ テシ}$$

ク, ケ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | | |
|---|--|--|--|--|
| ⑦ 0 | ① $\frac{2}{3}$ | ② $\frac{3}{4}$ | ③ $\frac{4}{3}$ | ④ $\frac{3}{2}$ |
| ⑤ $\frac{5}{2}$ | ⑥ $-\frac{2}{3}$ | ⑦ $-\frac{3}{4}$ | ⑧ $-\frac{4}{3}$ | ⑨ $-\frac{3}{2}$ |

コ の解答群

- | | |
|---|--|
| ① $\int_0^\beta f(x) dx = \int_\beta^a f(x) dx$ | ① $\int_0^a f(x) dx = 0$ |
| ② $\int_0^\beta f(x) dx = 0$ | ③ $\int_\beta^a f(x) dx = 0$ |

(2) 3 次関数 $g(x)$ に対して、与えられた条件のもとで $y = g(x)$ のグラフの概形を考えよう。

- 次の条件 (a) を考える。

条件(a) $g(0) = 0$ かつ $g'(0) > 0$ である。

条件(a)を満たす $y = g(x)$ のグラフの概形は
 原点 O を通り、原点における接線の傾きが正
 であることから (原点で $g(x)$ は増加している)
 ①, ②, ④

後の①～⑦のうち、条件(a)を満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は

①, ②, ④ の三つであり、残りの五つは条件(a)を満たさない。ただし、②, ④, ⑥ の解答の順序は問わない。

- 条件(a)に加えて、次の条件(b)を考える。

条件(b) $y = g'(x)$ のグラフは直線 $x = 0$ を軸とする放物線である。

条件(a)に加え、
 条件(b)を考えると
 $y = g(x)$ のグラフは 原点対称になることから
 (極値をもたない極値の座標は $-5, 5$ の方に集まる)
 ①, ④

後の①～⑦のうち、条件(a), (b)をともに満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形

は ①, ④ の二つであり、残りの六つは条件(a), (b)の少なくとも一方を満たさない。ただし、②, ④ の解答の順序は問わない。

- 条件(a), (b)に加えて、次の条件(c)を考える。

条件(c) $y = g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

条件(c)は上の①である。

条件(a), (b), (c)をすべてみたす

$y = g(x)$ のグラフの概形は ④

後の①～⑦のうち、条件(a), (b), (c)のすべてを満たす関数 $y = g(x)$ のグラフ

の概形は ④ の一つだけである。

タ ~ ナ については、最も適当なものを、次の①~⑦のうちから一つ
 ずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

