

第2問 (必答問題) (配点 15)

(1) 二つの角 A, B に対し

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \dots\dots\dots ①$$

が成り立つことを示そう。

二つの角 α, β に対し、加法定理から

$$\sin(\alpha + \beta) = \boxed{①} + \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots ②$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \boxed{①} - \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots ③$$

である。②と③の左辺どうし、右辺どうしを加え、 $\alpha = \boxed{④}$,

$\beta = \boxed{⑤}$ とすると、①が得られる。

$\frac{A+B}{2}$ ウ(2点)

ア の解答群

① $\sin \alpha \sin \beta$	② $\sin \alpha \cos \beta$	③ $\cos \alpha \sin \beta$	④ $\cos \alpha \cos \beta$
⑤ $\sin^2 \alpha$	⑥ $\sin^2 \beta$	⑦ $\cos^2 \alpha$	⑧ $\cos^2 \beta$

イ, ウ については、最も適当なものを、次の①~⑧のうちから一つ

ずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

① A	② B	③ $A+B$	④ $A-B$
⑤ $\frac{A+B}{2}$	⑥ $\frac{A-B}{2}$	⑦ $\frac{A+B}{4}$	⑧ $\frac{A-B}{4}$

AとBの
和の半分
(平均)

AとBの
差の半分

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots\dots ②$$

$$+ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots\dots ③$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \dots\dots ②+③$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{A+B}{2} \\ \beta = \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

より ① が得られる

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{5}{12}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$$

とする。

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で $f(x)$ の最大値を考えよう。

① を用いると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin\left(x + \boxed{\text{③}}\right) \cos \boxed{\text{②}} \\ &= 2 \cos \boxed{\text{⑤}} \sin\left(x + \boxed{\text{④}}\right) \end{aligned}$$

(2点)

と変形できる。

$2 \cos \boxed{\text{⑤}}$ は正の定数であるから、 $0 \leq x < 2\pi$ の範囲において、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{③}}$ で最大値 $\boxed{\text{⑥}}$ をとる。

$\boxed{\text{②}} \sim \boxed{\text{④}}$ については、最も適当なものを、次の①～⑦のうちから一つ

ずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

① 0	② $\frac{\pi}{12}$	③ $\frac{\pi}{6}$	④ $\frac{\pi}{4}$
⑤ $\frac{\pi}{3}$	⑥ $\frac{\pi}{2}$	⑦ $\frac{3}{4}\pi$	⑧ π

$\boxed{\text{⑧}}$ の解答群

① $\frac{1}{2}$	② 1	③ 2	④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	⑥ $\sqrt{2}$	⑦ $\sqrt{3}$	⑧ $2\sqrt{2}$

① $A = x + \frac{5}{12}\pi$, $B = x + \frac{\pi}{12}$ とすると

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2} \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = x + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

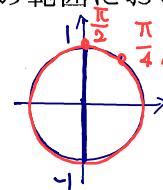
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(x + \frac{5}{12}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{6} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ において } \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$



$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\ f(x) &\text{は } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ &\text{のとき最大になる} \end{aligned}$$

よて、

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ より } x = \frac{\pi}{4} \quad \text{③カ}$$

$$\begin{aligned} &\text{よとき } f(x) \text{ の} \\ &\text{最大値 } \sqrt{3} \\ &\text{⑥キ} \end{aligned}$$

(3) a を $0 < a < \pi$ を満たす定数とし、関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sin(x + a) + \sin(x + 2a) + \sin(x + 3a)$$

とする。

花子さんと太郎さんは、関数 $y = g(x)$ のグラフをコンピュータを用いて表示
 させてみた。図1は、 $a = 0.5$, $a = 1.0$, $a = 1.5$ としたときの $y = g(x)$ のグ
 ラフである。これを見て、花子さんと太郎さんは、関数 $g(x)$ について話してい
 る。

← 角が公差 a の
 等差数列になているので

等差中項を
 利用しやすくなる

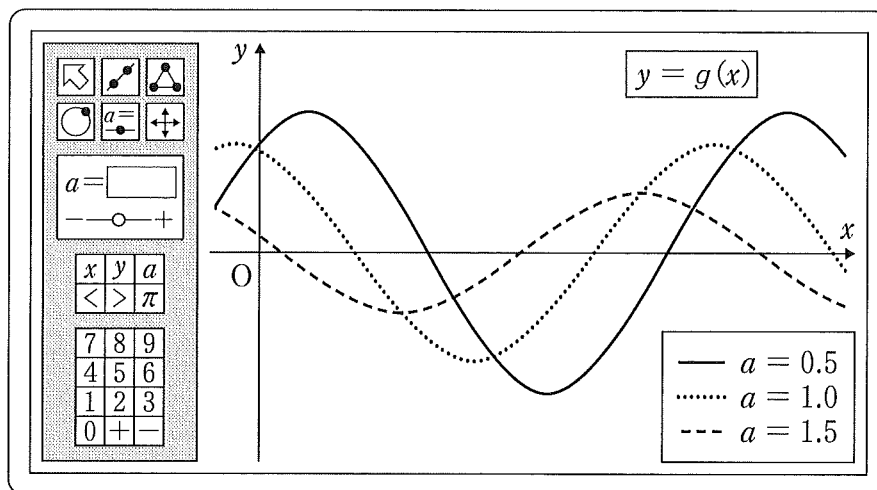


図 1

花子： $g(x)$ は、定数 p, q を用いて $g(x) = p \sin(x + q)$ と変形できそうだね。

太郎：三つの関数 $\sin(x + a)$, $\sin(x + 2a)$, $\sin(x + 3a)$ のうちの二つの関数の和に ① を使うと、残り一つの関数の定数倍にできるかな。

(i) ①を用いると、関数 $\sin(x+a)$, $\sin(x+2a)$, $\sin(x+3a)$ のうちの二

つの関数の和 $\boxed{\text{①}}$ は、残りの関数 $\sin(x + \boxed{\text{①}})$ の定数倍となる。

したがって、関数 $g(x)$ は

$$g(x) = \boxed{\text{④}} \sin(x + \boxed{2a})$$

と変形することができる。

①と $A=x+a$, $B=x+3a$ とおく

$$\frac{A+B}{2} = \frac{x+a+x+3a}{2} = x+2a$$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{x+a-x-3a}{2} = -a$$

$$\sin(x+a) + \sin(x+3a) = 2 \sin(x+2a) \cos(-a) = 2 \cos a \sin(x+2a)$$

① $\sin(x+a) + \sin(x+3a)$ は $\sin(x+2a)$ の定数 $2 \cos a$ 倍となる

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① $\sin(x+a) + \sin(x+2a)$

① $\sin(x+a) + \sin(x+3a)$

② $\sin(x+2a) + \sin(x+3a)$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

① a

① $2a$

② $3a$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

① $2 \cos a$

① $-2 \cos a$

② $2 \cos 2a$

③ $-2 \cos 2a$

④ $(2 \cos a + 1)$

⑤ $(-2 \cos a + 1)$

⑥ $(2 \cos 2a + 1)$

⑦ $(-2 \cos 2a + 1)$

$$g(x) = \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a) = 2 \cos a \sin(x+2a) + \sin(x+2a) = (2 \cos a + 1) \sin(x+2a)$$

④コ

(ii) $a = \frac{5}{6}\pi$ のとき, $0 \leq x < 2\pi$ の範囲において, $g(x)$ は $x = \frac{\boxed{11}}{\boxed{6}}\pi$ で

最大値 $\frac{\boxed{8}}{\boxed{2}}$ をとる。

$\boxed{7}$ の解答群

① 0	④ 1	⑦ 2	⑩ -1
② -2	⑤ $\sqrt{3}$	⑧ $-\sqrt{3}$	⑪ $\sqrt{3} + 1$
③ $\sqrt{3} - 1$	⑥ $-\sqrt{3} + 1$		

$a = \frac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x) = \left(2 \cos \frac{5}{6}\pi + 1\right) \sin\left(x + \frac{5}{3}\pi\right)$$

$$= (-\sqrt{3} + 1) \sin\left(x + \frac{5}{3}\pi\right)$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ において } \frac{5}{3}\pi \leq x + \frac{5}{3}\pi < \frac{11}{3}\pi \text{ である}$$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{5}{3}\pi\right) \leq 1$$

$-\sqrt{3} + 1 < 0$ である $g(x)$ は $\sin\left(x + \frac{5}{3}\pi\right) = -1$ のとき最大になる

よって $x + \frac{5}{3}\pi = \frac{7}{2}\pi$ より $\boxed{x = \frac{11}{6}\pi}$ である $g(x)$ の最大値 $(-\sqrt{3} + 1) \times (-1) = \boxed{\sqrt{3} - 1}$ である

