第１問　（必答問題）（配点　15）

Oを原点とする座標平面において，方程式

$$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の表す円を C_1 とする。また，方程式

$$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

の表す円を C_2 とする。

(1)　C_1 の中心の座標は$\left(\boxed{-1},\ \boxed{6}\right)$である。
アイ　ウ（2点）

C_1 の半径を r_1，C_2 の半径を r_2，C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とすると，$r_1 = \boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$，$r_2 = \boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}$，$d = \sqrt{\boxed{29}}$ である。
エ　オ　カ　キ（2点）　クケ（2点）

r_1，r_2 と d の関係から，C_1 と C_2 は 2 点で交わることがわかる。

（数学Ⅱ，数学B，数学C第1問は次ページに続く。）

① は　$x^2+y^2+2x-12y+25=0$

$$(x+1)^2+(y-6)^2 = 1+36-25$$
$$= 12$$

C_1 の中心 $\boxed{(-1,6)}$，半径 $r_1 = \boxed{2\sqrt{3}}$
アイ ウ　エオ

② は　$x^2+y^2-2x-2y-25=0$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 1+1+25$$
$$= 27$$

C_2 の中心 $(1,1)$，半径 $r_2 = \boxed{3\sqrt{3}}$
カキ

C_1 と C_2 の中心間の距離 d は

$$d = \sqrt{(1+1)^2+(6-1)^2} = \sqrt{4+25} = \boxed{\sqrt{29}}$$ クケ

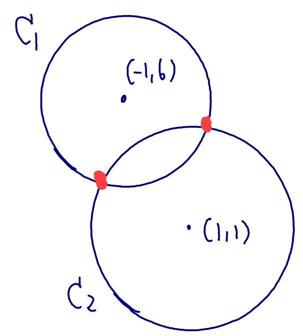
$$\sqrt{3} < \sqrt{29} < 5\sqrt{3}$$

より

$$r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1$$

(半径の差)＜(中心間の距離)＜(半径の和)

であるから
C_1 と C_2 は 2点で交わる。



(2) 不等式

$$x^2 + y^2 - 7y + |2x - 5y + 25| < 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の表す領域について考える。

③ の左辺は，$2x - 5y + 25 \geqq 0$ のときは ① の左辺と一致し，$2x - 5y + 25 < 0$ のときは ② の左辺と一致する。

(i) 不等式 $2x - 5y + 25 \geqq 0$ の表す領域を D，不等式 $2x - 5y + 25 < 0$ の表す領域を E とする。

D のとき ①

E のとき ②

- 原点 O は $\boxed{コ}$ に含まれる。 D ⓪
- C_1 の中心は $\boxed{サ}$ に含まれる。 E ①
- C_2 の中心は $\boxed{シ}$ に含まれる。 D ⓪

$\boxed{コ}$ ～ $\boxed{シ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ D コ,シ	① E サ

$f(x,y) = 2x - 5y + 25$

とおくと

$D : f(x,y) \geqq 0$

$E : f(x,y) < 0$

(i) $f(0,0) = 25 > 0$

$f(-1,6) = -2 - 30 + 25 = -7 < 0$

$f(1,1) = 2 - 5 + 25 = 22 > 0$

原点Oは D に含まれる ⓪コ

C_1 の中心 $(-1,6)$ は E に含まれる ①サ

C_2 の中心 $(1,1)$ は D に含まれる ⓪シ

(ii)　方程式

$$2x - 5y + 25 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

の表す直線を ℓ とする。

実数 x，y が ① と ② の両方を満たすとする。① と ② の左辺どうし，右辺どうしの差をとると

$$2(2x - 5y + 25) = 0$$

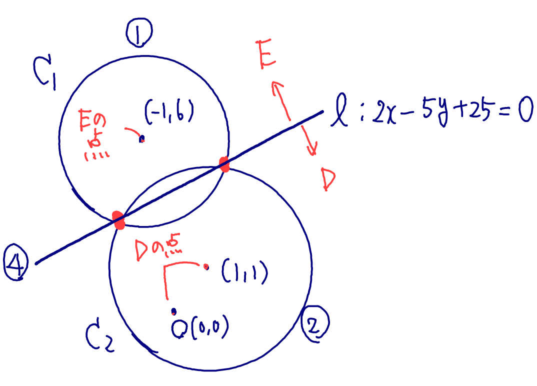
となる。よって，実数 x，y は ④ も満たす。

したがって，$\boxed{\text{②}}$。このことから，ℓ は C_1 と C_2 の二つの交点を通る直線であることがわかる。

ス (2点)

$\boxed{\text{ス}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　点 P を ℓ 上の点とすると，P は C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある
①　点 P を ℓ 上の点とすると，P は C_1 上にあるか，または C_2 上にある
②　点 P を C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある点とすると，P は ℓ 上にある
③　点 P を C_1 上にあるか，または C_2 上にある点とすると，P は ℓ 上にある
④　点 P を C_1 上の点，点 Q を C_2 上の点とすると，直線 PQ は ℓ と一致する
⑤　点 P を C_1 上の点，点 Q を C_2 上の点とすると，直線 PQ は ℓ と交わる



点P(x, y) とすると

実数 x, y が ① かつ ② をみたし，④ もみたす。

したがって

点Pを C_1 上にあり，C_2 上にもある点とすると

C_1 と C_2 の共有点

Pは ℓ 上にある。　$\boxed{②}$ ス

ℓ : 2x−5y+25=0 は

C_1 と C_2 の2つの交点を通る直線

補　束の考え方

(iii) 不等式

$$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$$ ‥①′ ← 円C_1の内部

の表す領域と(i)の領域 D の共通部分を F とする。

また，不等式

$$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$$ ‥②′ ← 円C_2の内部

の表す領域と(i)の領域 E の共通部分を G とする。

不等式③の表す領域は，F と G の和集合である。これを図示すると $\boxed{0}$ の灰色部分である。ただし，境界線を含まない。

セ(3点)

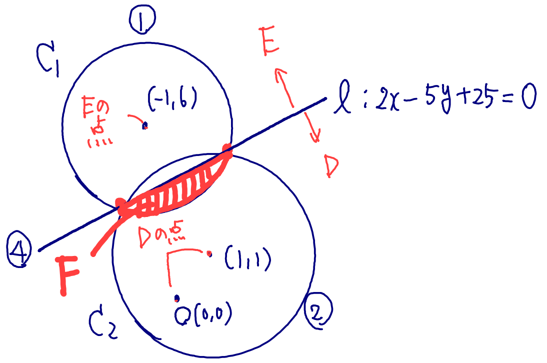
(iv) ③において，$|2x-5y+25|$ の前の符号を＋から－に変えた不等式

$$x^2+y^2-7y-|2x-5y+25|<0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

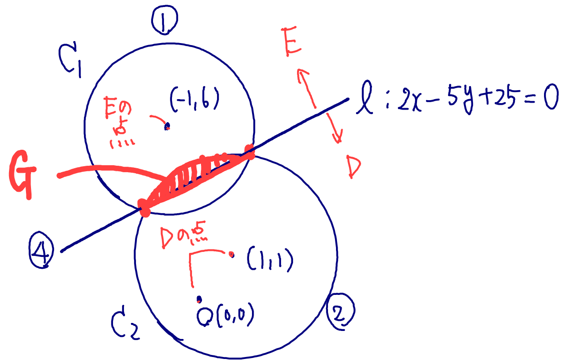
を考える。⑤の表す領域を図示すると $\boxed{4}$ の灰色部分である。ただし，境界線を含まない。

ソ(2点)

(iii) 円C_1の内部かつDの部分がFなので



円C_2の内部かつEの部分がGなので



$F \cup G$ は $\boxed{0}$ の灰色部分 セ

(iv) ⑤について

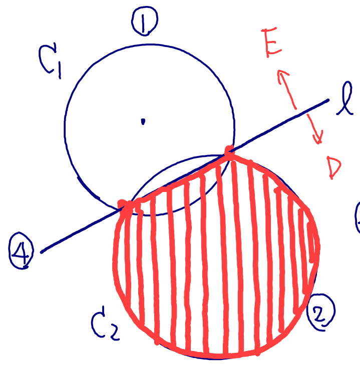
D: $2x-5y+25 \geqq 0$ のとき ②′

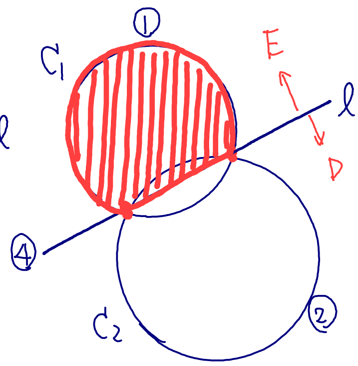
E: $2x-5y+25<0$ のとき ①′

(iii)で ①′と②′が入れかわった

より ⑤の表す領域は

Dかつ円C_2の内部 または Eかつ円C_1の内部





⑤はこれらの和集合の領域であるから

$\boxed{4}$ の灰色部分 ソ

セ ， ソ については，最も適当なものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，⓪～⑧では座標軸を省略している。