

数学 I, 数学 A

第 4 問 (配点 20)

1 人対 1 人で対戦する競技の大会があり, A, B, C の 3 人, または A, B, C, D の 4 人で開催される。大会はリーグ戦形式で行われる。すなわち, それぞれの人が他のすべての人と 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし, A が対戦相手に勝つ確率は $\frac{2}{3}$ であり, A 以外の 2 人が対戦するとき勝つ確率はどちらも $\frac{1}{2}$ であるものとする。なお, 各対戦の結果は互いに影響を与えないものとする。

すべての対戦が終わった後, 次の優勝者の決め方により優勝者を 1 人決める。

優勝者の決め方

勝ち数が一番多い人が 1 人であれば, その人を優勝者とする。そうでなければ, 抽選により, 勝ち数が一番多い人の中から 1 人を選び, その人を優勝者とする。ただし, 勝ち数が一番多い人の人数が n 人であるとき, それぞれの人が選ばれる確率は $\frac{1}{n}$ であるものとする。

ひとりごと

← 抽選よ

優勝決定戦
で優勝者を
決めてほしいね

A が優勝する確率を, A, B, C の 3 人でリーグ戦を行うときと, A, B, C, D の 4 人でリーグ戦を行うときとで比較しよう。

数学 I， 数学 A

以下では，すべての対戦の勝敗を対戦結果と呼ぶ。なお，対戦結果は抽選の結果を含まない。対戦結果を示すために表を用いる。例えば，表 1 は 4 人でリーグ戦を行ったときの対戦結果の一つを示す。A から始まる行の×○○は，A が B に負け C と D に勝ち，2 勝 1 敗となったことを示す。また，勝ち数が一番多い A と B の 2 人が抽選の対象であり，そのことを✓で示す。

確率をかきこむ

表 1

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		× $\frac{1}{3}$	○ $\frac{2}{3}$	○ $\frac{2}{3}$	2	1	✓
B	○ $\frac{1}{3}$		○ $\frac{1}{2}$	× $\frac{1}{2}$	2	1	✓
C	× $\frac{1}{2}$	× $\frac{1}{2}$		○ $\frac{1}{2}$	1	2	—
D	× $\frac{1}{2}$	○ $\frac{1}{2}$	× $\frac{1}{2}$		1	2	—

1/2 と A と B が優勝

A が対戦相手に 勝つ (○) 確率は $\frac{2}{3}$
A が対戦相手に 負ける (×) 確率は $\frac{1}{3}$

↪ A は他より勝ちやすい

A 以外の 2 人が対戦相手に 勝つ (○) 確率は $\frac{1}{2}$
A 以外の 2 人が対戦相手に 負ける (×) 確率は $\frac{1}{2}$

↪ A 以外は互角

数学 I, 数学 A

(1) A, B, C の 3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率を考える。

(i) A が 2 勝 0 敗ならば, A が優勝する。A が 2 勝 0 敗で優勝する確率は

	A	B	C
A		○	○
B	×		
C	×		

$$\frac{\boxed{4}^{\text{ア}}}{\boxed{9}^{\text{イ}}}$$

である。
イ (3点)

A が 2 勝 0 敗で優勝する確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\boxed{4}^{\text{ア}}}{\boxed{9}^{\text{イ}}}$

	A	B	C
A		○	×
B	×		
C	○		

(ii) A が 1 勝 1 敗で優勝するためには, B も C も 1 勝 1 敗であることが必要である。例えば, A が勝つ相手が B であるとき, A が C に負け B が C に勝つことが必要である。表 2 は, この対戦結果を示し, この対戦結果になる確率は

$$\frac{\boxed{1}^{\text{ウ}}}{\boxed{9}^{\text{エ}}}$$

である。この対戦結果になり, かつ A が抽選により優勝者選ばれ

A が C に負けるとき
C が B に勝つと
C が 2 勝 0 敗で
優勝してしまう

る確率は $\frac{\boxed{1}^{\text{ウ}}}{\boxed{9}^{\text{エ}}} \times \frac{\boxed{1}^{\text{オ}}}{\boxed{3}^{\text{カ}}}$ である。
カ (3点)

表 2 の対戦結果の確率は

A が B に ○, A が C に ×, B が C に ○ となることから

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\boxed{1}^{\text{ウ}}}{\boxed{9}^{\text{エ}}}$$

A が抽選で優勝する確率は 1 勝 1 敗が 3 人なので

$$\frac{1}{9} \times \frac{\boxed{1}^{\text{オ}}}{\boxed{3}^{\text{カ}}} = \frac{1}{27} \dots \textcircled{1}$$

表 2

	A	B	C	勝ち数	負け数	抽選
A		○	×	1	1	✓
B	×		○	1	1	✓
C	○	×		1	1	✓

	A	B	C
A		×	○
B	○		×
C	×	○	

2 通り

A が勝つ相手は B, C の 2 通りあることに注意すると, A が 1 勝 1 敗で優勝

する確率は $\frac{\boxed{2}^{\text{キ}}}{\boxed{27}^{\text{ク}}}$ であることがわかる。
ク (2点)

$$\textcircled{1} \times 2 \text{ 通り} \quad \frac{1}{27} \times 2 = \frac{\boxed{2}^{\text{キ}}}{\boxed{27}^{\text{ク}}}$$

(i) と (ii) から, A が優勝する確率は $\frac{\boxed{4}^{\text{ア}}}{\boxed{9}^{\text{イ}}} + \frac{\boxed{2}^{\text{キ}}}{\boxed{27}^{\text{ク}}}$ である。

3 人のリーグ戦で A が優勝する確率を P_3 とすると $P_3 = \frac{\boxed{4}^{\text{ア}}}{\boxed{9}^{\text{イ}}} + \frac{\boxed{2}^{\text{キ}}}{\boxed{27}^{\text{ク}}} = \frac{14}{27}$
(i) (ii)

Aが3勝0敗

(2) A, B, C, D の4人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率を考える。

A が3勝0敗ならば, A が優勝する。また, A が1勝2敗ならば, 2勝以上する人がいるため A は優勝しない。

A が2勝1敗で優勝する確率を, 全敗する人がいる場合の確率と全敗する人がいない場合の確率の和として求める。

Aは抽選なしで優勝する確率は
 $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$

Aが2勝1敗

	A	B	C	D
A		○	○	○
B	×			
C	×			
D	×			

2勝する人がいるので A は優勝できない

(i) 全敗する人がいる場合で, かつ A が2勝1敗で優勝する確率を求める。

全敗する人は B, C, D の3通りある。例えば, D が全敗するとき, 対戦結果の一部を示すと表3のようになる。

(i) の (ii) のように A が1勝1敗になると A は2勝1敗で優勝する

表 3

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		○	×	○			
B	×			○			
C	○			○			
D	×	×	×		0	3	—

Bが全敗

	A	B	C	D
A		○		
B	×		×	×
C		○		
D		○		

Cが全敗

	A	B	C	D
A			○	
B	×		○	×
C	×	×		×
D			○	

3通り

D が全敗する確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ コサ

このもとで A が2勝1敗で優勝する確率は A, B, C の3人と対戦し1勝1敗で A が優勝することから (i) (ii) の $\frac{2}{27}$

D が全敗する確率は $\frac{1}{6}$ コである。D が全敗する場合, A が2勝1敗で

優勝するためには, A が D 以外の2人との対戦で1勝1敗となる必要がある。

以上のことから, (1) の (ii) の結果を用い, 全敗する人が B, C, D の3通りあることに注意すると, 全敗する人がいる場合で, かつ A が2勝1敗で優勝

する確率は $\frac{1}{27}$ シであることがわかる。 (3点)

$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{27} \times 3 = \frac{1}{27}$ シ
 1人が全敗で A が2勝1敗で優勝
 全敗する人は3通り (BかCかDが3敗する)

数学 I, 数学 A

(ii) 全敗する人がいない場合で、かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を求める。

A が 2 勝 1 敗のとき、A が負ける相手は B, C, D の 3 通りある。例えば、A が負ける相手が B であるとき、対戦結果の一部を示すと表 4 のようになる。

A に勝った B が C, D にも勝つと 3 勝 0 敗で B が優勝してしまう
 0.0 にはならない 表 4

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	
B	○						
C	×						
D	×						

このとき、A が優勝するためには、B は 2 勝 1 敗か 1 勝 2 敗であることが必要である。例えば、表 1 は、A と B が 2 勝 1 敗である対戦結果の一つを示し、A と B の 2 人が抽選の対象となったことを示す。

B は C から D まで負ける

表 1 (再掲)

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	✓
B	○		○	×	2	1	✓
C	×	×		○	1	2	—
D	×	○	×		1	2	—

	A	B	C	D
A		×	○	○
B	○		○	×
C	×	×		○
D	×	○	×	

全敗する人はいない
 0.0 ではない

数学 I, 数学 A

	A	B	C	D
A		X	O	O
B	O		X	X
C	X	X		O
D	X	O	X	

左のように 4 通り

1行に X が3つはない

全敗する人がいない場合で、かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝するとき

の対戦結果は 4 通りある。A が負ける相手が B, C, D の3通りあること

に注意すると、全敗する人がいない場合で、かつ A が2勝1敗で優勝する

	A	B	C	D
A		X	O	O
B	O		X	X
C	X	O		X
D	X	X	O	

確率は $\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}}$ であることがわかる。

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{9}$$

$\frac{1}{3}$: AがBにX
 $\frac{2}{3}$: BとC, BとD
 $\frac{2}{3}$: CとDの対戦の確率
 $\frac{1}{2}$: 2勝1敗の2人の抽選
 $\frac{1}{2}$: Aが負ける相手
 3 : (BかCかD)

	A	B	C	D
A		X	O	O
B	O		X	X
C	X	O		O
D	X	O	X	

(i) と (ii) から、A が2勝1敗で優勝する確率は $\frac{\boxed{1}}{\boxed{27}}$ + $\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}}$ である。

	A	B	C	D
A		X	O	O
B	O		X	X
C	X	O		X
D	X	O	O	

以上のことから、A が3勝0敗で優勝する確率を考慮すると、A が優勝する確率は $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ であることがわかる。この確率は (1) で求めた3人でリーグ戦を行

うときに A が優勝する確率より $\frac{\boxed{2}}{\boxed{27}}$ だけ 0 小さい。

又 の解答群

0 小さい ① 大きい

4人のリーグ戦で A が優勝する確率を P_4 とすると $P_4 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{8}{27} = \frac{1+3+8}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

$\frac{1}{27}$: (i)
 $\frac{1}{9}$: (ii)
 $\frac{8}{27}$: Aが3勝0敗

(1) より $P_3 = \frac{14}{27}$

$$P_3 - P_4 = \frac{14}{27} - \frac{12}{27} = \frac{2}{27}$$

よって P_4 は P_3 より $\frac{\boxed{2}}{\boxed{27}}$ だけ 0 小さい。