

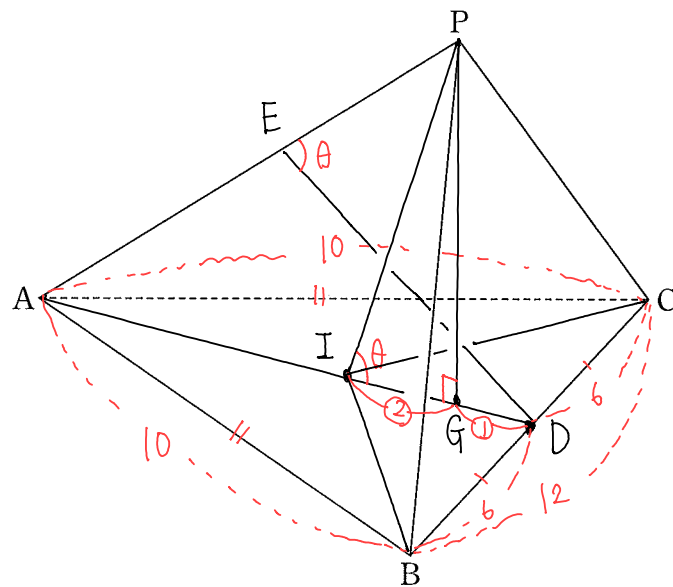
数学 I, 数学 A

第 3 問 (配点 20)

内角の
2等分線の
交点

空間内に, $AB = AC = 10$, $BC = 12$ である二等辺三角形 ABC がある。△ABC の内心を I とし, △IBC の重心を G とする。 G を通り, △ABC を含む平面と垂直な直線上に, G と異なる点 P がある。このとき, △ABC を底面とする三角錐 $PABC$ について考えよう。

中線を2:1に内分する点



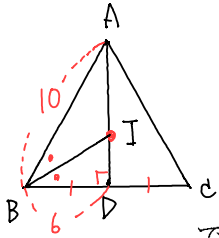
参考図

直線 AI と辺 BC の交点を D とし, また, 辺 PA 上の点 E は, $\angle PED = \angle PID = \theta$ とおくを満たしているとする。なお, 以下の問題において比を解答する場合は, 最も簡単な整数の比で答えよ。

数学 I, 数学 A

$\angle ABC$ を 2 等分する

- (1) 直線 BI が ② ことに注意すると, $\triangle ABD$ において線分 AI と ID の長さの比を求めることができる。よって, 線分 AD の長さに着目すると



AI = 5, ID = 3

$\triangle ABD$ は $\angle ADB = 90^\circ$ の直角三角形で
 $AB = 10, BD = 6$ なのだから $AD = 8$
 直線 BI が $\angle ABC$ を 2 等分することから

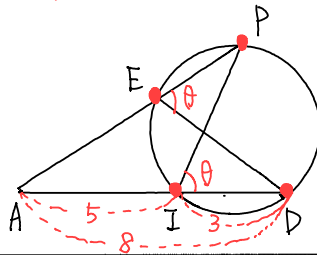
であることがわかる。また, 4 点 E, I, D, P は同一円周上にある。よって

$AE \cdot AP =$ 40

$\angle PED = \angle PID (= \theta)$
 であるから,

4 点 E, I, D, P は同一円周上にある。 ← $\angle P$ の円周角が等しい

であることがわかる。



方べきの定理を用いて

$AE \cdot AP = AI \cdot AD$
 $= 5 \cdot 8$
 $=$ 40 オカ

ア の解答群

- ① 直線 AC と垂直に交わる
- ① 直線 AC とねじれの位置にある
- ② $\angle ABC$ を 2 等分する
- ③ 辺 AC の中点を通る

エ の解答群

- ① A
- ① B
- ② C
- ③ G
- ④ P

数学 I, 数学 A

(2) 線分 PI と DE の交点を F とする。このとき、線分 IF と FP の長さの比と、三角錐 PABC の体積との関係について考えよう。

(i) 次の仮定 1のもとで三角錐 PABC の体積 V_1 について考える。

仮定 1

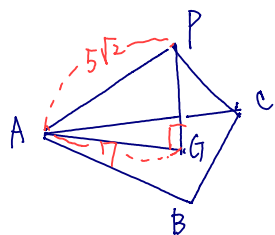
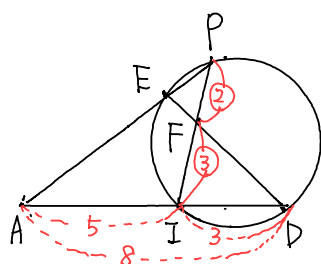
線分 IF と FP の長さの比が $IF : FP = 3 : 2$ である。

このとき

$$PE : EA = \boxed{1} : \boxed{4} \quad \text{キ, 7 (3点)}$$

であるから、(1)での考察に注意すると、 $AP = \boxed{5} \sqrt{\boxed{2}}$ となる。
ケ, コ (3点)

したがって、直線 PG が $\triangle ABC$ を含む平面に垂直であることに注意すると、 $V_1 = \boxed{16}$ であることがわかる。
サシ (2点)



メネラウスの定理を用いて

$$\frac{AD}{DI} \cdot \frac{IF}{FP} \cdot \frac{PE}{EA} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{PE}{EA} = 1$$

$$\text{よって} \quad \frac{PE}{EA} = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad PE : EA = \boxed{1 : 4} \quad \text{キ, 7}$$

$$PE = x, EA = 4x \quad \text{とおくと} \quad AP = 5x$$

$$AP \cdot AE = 5x \cdot 4x = 20x^2 = 40 \quad \text{ア (1)}$$

$$x^2 = 2 \\ \therefore x = \sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad AP = \boxed{5\sqrt{2}} \quad \text{ケ, コ}$$

$$IG = \frac{2}{3} ID = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

$$AG = AI + IG = 5 + 2 = 7$$

$\triangle APG$ に三平方の定理を用いて

$$\text{よって} \quad V_1 = \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot PG = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 1 = \boxed{16} \quad \text{サシ}$$

$\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC \text{ の面積は } = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$$

$$PG = \sqrt{AP^2 - AG^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} = \sqrt{50 - 49} = 1$$

(ii) (i) の仮定 1 の代わりに次の仮定 2 をおき，三角錐 PABC の体積の変化について考える。

仮定 2

線分 IF と FP の長さの比が $IF : FP = 1 : 3$ である。

仮定 2 のもとでの三角錐 PABC の体積 V_2 を, (i) で求めた V_1 と比較すると, V_2 と V_1 の比は

$$V_2 : V_1 = \boxed{6} : \boxed{1}$$

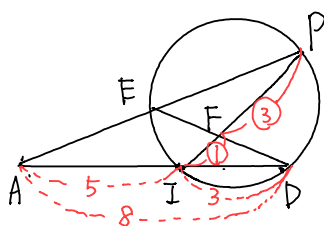
V_2 は V_1 より大きい

であるから, 2。

ソ (4点)

ソの解答群

- ② V_2 は V_1 より大きい



メネラウスの定理を用いて

ラウスの定理を用いて

$$\frac{AD}{DI} \cdot \frac{IF}{FP} \cdot \frac{PE}{EA} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{PE}{EA} = 1$$

よて $\frac{PE}{EA} = \frac{9}{8}$ であるから $PE:EA = 9:8$

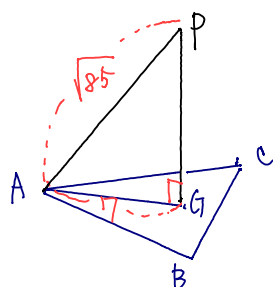
$PE = 9x$, $EA = 8x$ とおくと $AP = 17x$

$$AP \cdot AE = 17x \cdot 8x = 17 \cdot 8x^2 = 40$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{5}{17}} = \frac{\sqrt{85}}{17}$$

$$\therefore \lambda = \sqrt{17}$$

ゆえに $AP = 17 \cdot \frac{\sqrt{85}}{17} = \sqrt{85}$



$\triangle APG$ に三平方の定理を用いて $PG = \sqrt{AP^2 - AG^2} = \sqrt{(85)^2 - 17^2} = \sqrt{85^2 - 49} = 6$

よって $V_2 : V_1 = \frac{1}{3} \Delta ABC \cdot 6 : \frac{1}{3} \Delta ABC \cdot 1 = \boxed{6:1}$ ← ΔABC を底面とみて高さPGの比が
 $V_2 > V_1$ (2)ッ 体積比