

数学 I, 数学 A

第 2 問 (配点 30)

〔1〕 2 次関数の最大値, 最小値について考えよう。

(15点)

(1) 2 次関数 $y = 2x^2 - 8x + 5$ は $0 \leq x \leq 3$ において, $x = \boxed{0}$ で最大

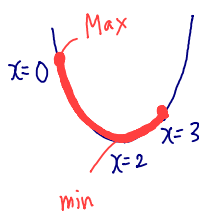
値 $\boxed{5}$ をとり, $x = \boxed{2}$ で最小値 $\boxed{-3}$ をとる。

イ (2点)

ウ

エオ (2点)

$$y = 2(x-2)^2 - 3$$



$x = \boxed{0}$ で 最大値 $\boxed{5}$

$x = \boxed{2}$ で 最小値 $\boxed{-3}$

数学 I， 数学 A

- (2) 太郎さんと花子さんは、(1)を振り返って 2 次関数の最大値，最小値について話している。

太郎：(1)では，2 次関数と x のとり得る値の範囲が与えられて，最大値と最小値を求めることができたね。

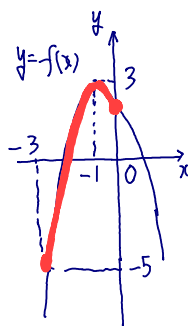
花子：じゃあ， x の値の範囲とそのときの最大値と最小値に関する条件が与えられている場合に，条件を満たす 2 次関数を求めることはできるのかな。具体的な例で考えてみよう。

- (i) 2 次関数 $y = f(x)$ は次の条件 1 を満たすとする。

条件 1

$y = f(x)$ は $-3 \leq x \leq 0$ において

- $x = -1$ で最大値 3 をとる。 ← 頂点 $(-1, 3)$ かつ上に凸とわかる！
- $x = -3$ で最小値 -5 をとる。 ← 点 $(-3, -5)$ を通ることわかる！



このとき， $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は $(-1, 3)$ であり (3) であり (3) カ (2点)

$$f(x) = \boxed{-2} x^2 - \boxed{4} x + \boxed{1}$$

キ ケ コ (2点)

である。

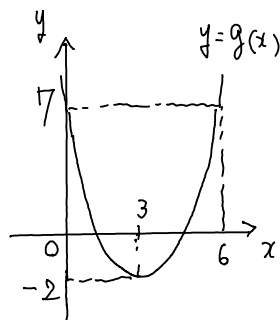
(3) の解答群

- | | | |
|------------|-----------|------------|
| ① (0, 3) | ② (1, 3) | ③ (3, 3) |
| ④ (-1, 3) | ⑤ (-3, 3) | ⑥ (0, -5) |
| ⑦ (1, -5) | ⑧ (3, -5) | ⑨ (-1, -5) |
| ⑩ (-3, -5) | | |

$y = f(x)$ の
頂点は $(-1, 3)$ ③カ
 $f(x) = k(x+1)^2 + 3$ ($k < 0$)
とまて
 $f(-3) = -5$
なので
 $k + 3 = -5$
 $\therefore k = -2$
よて $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$
 $= -2x^2 - 4x + 1$
キ ケ コ

数学 I, 数学 A

(ii) 2 次関数 $y = g(x)$ は次の条件 2 を満たすとする。

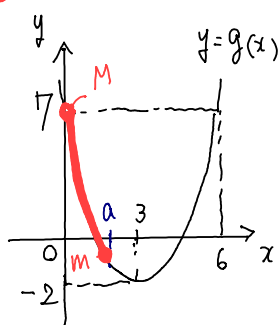


条件 2

a を正の定数とし, $y = g(x)$ の $0 \leq x \leq a$ における最大値を M , 最小値を m とすると

- $0 < a < 3$ ならば, $m > -2$ である。
- $a \geq 3$ ならば, $m = -2$ である。
- $0 < a \leq 6$ ならば, $M = 7$ である。
- $a > 6$ ならば, $M > 7$ である。

⑧ $0 < a < 3$ のとき



このとき, 2 次関数 $y = g(x)$ のグラフは の放物線であり

$$g(x) = \text{⑥} \quad x^2 - 6x + 7$$

$y = g(x)$ のグラフは と頂点 $(3, -2)$ であるから

$$g(x) = k(x-3)^2 - 2$$

と表せて $(0, 7)$ を通るから $g(0) = 7$ なる

$$g(0) = 9k - 2 = 7$$

$$\therefore k = 1$$

$$\therefore g(x) = (x-3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7 \quad \text{⑥}$$

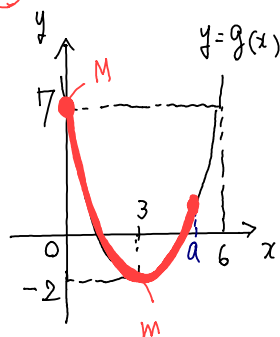
である。

の解答群

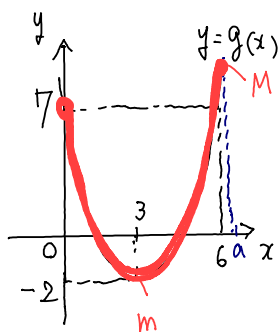
② 下に凸

① 上に凸

⑪



⑫



の解答群

① $2x^2 - 12x + 16$

① $-2x^2 + 12x - 16$

② $2x^2 - 12x - 16$

③ $-2x^2 + 12x - 20$

④ $x^2 - 7$

⑤ $-x^2 + 7$

⑥ $x^2 - 6x + 7$

⑦ $-x^2 + 6x - 7$

⑧ $2x^2 - 9x + 7$

⑨ $-2x^2 + 3x + 7$

数学 I, 数学 A

(3) 2 次関数 $y = h(x)$ は次の条件 3 を満たすとする。

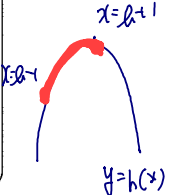
条件 3

b を定数とし, $y = h(x)$ の $b-1 \leq x \leq b+1$ における最大値を M とすると

- $1 \leq b \leq 7$ ならば, $M \geq 0$ である。
- $b < 1$ または $7 < b$ ならば, $M < 0$ である。

上に凸とわかる

区間が左や右にいくと $M < 0$ となる



太郎さんと花子さんは $h(x)$ について話している。

太郎: (2) の条件 1 や条件 2 からは関数が一つに決まったけど, 条件 3 だけでは, $h(x)$ が一つに決まりそうにないね。

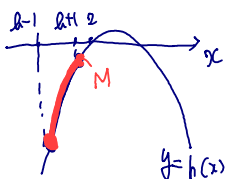
花子: でも, $y = h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の座標はわかりそうだね。

2 次関数 $y = h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は 2 および 6 である。ただし, ス, セ の解答の順序は問わない。
セ (3点)

⑩ $b < 1$ ならば

$$b-1 \leq x \leq b+1 < 2$$

この区間では $h(x)$ は単調増加

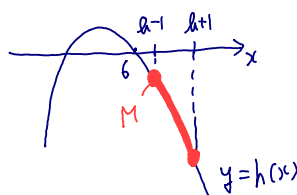


$$M = h(b+1) < h(2) = 0$$

⑪ $7 < b$ ならば

$$6 < b-1 \leq x \leq b+1$$

この区間では $h(x)$ は単調減少



$$M = h(b-1) < h(6) = 0$$

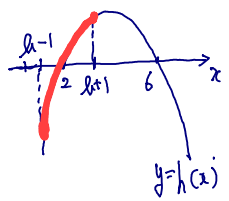
⑩, ⑪ より $h(2) = h(6) = 0$

このもとで $1 \leq b \leq 7$ ならば

区間は

$$b-1 \leq x \leq b+1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \leq x \leq 2 \\ \vdots \\ 6 \leq x \leq 8 \end{pmatrix}$$



$h(x) \geq 0$ となる x の範囲は $M \geq 0$ である

よって $y = h(x)$ と x 軸の共有点の x 座標は

2 および 6
ス セ

⑫ $h(x) = a(x-2)(x-6)$ ($a < 0$) の形とわかるが a は一つに定まらない