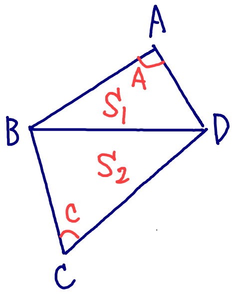
数学Ⅰ，数学A

〔2〕 以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

(20点)

(1) 四角形ABCDの面積Sについて考えよう。以下では，四角形ABCDの内角∠A，∠B，∠C，∠Dの大きさを，それぞれA，B，C，Dで表す。ただし，四つの内角はいずれも180°より小さいものとする。



対角線BDを共通の1辺とする△ABDと△BCDの面積を，それぞれS_1，S_2とすると

AB·AD　　　BC·CD

$$S_1 = \frac{\boxed{①}}{2}\sin A,\qquad S_2 = \frac{\boxed{④}}{2}\sin C$$

ク(2点)　ケ(2点)

$S_1 = \frac{1}{2}\boxed{AB\cdot AD}\sin A$ ①ク

$S_2 = \frac{1}{2}\boxed{BC\cdot CD}\sin C$ ④ケ

となる。

四角形ABCDの四つの内角が$A + C = B + D$を満たすとき，$A + C = \boxed{④}$となる。このとき，$\sin C$を$\sin A$を用いて表せることに注意すると

180° コ

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\boxed{②}}{2}\sin A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

AB·AD＋BC·CD　サ(3点)

となる。

$A+C=B+D$
をみたすとき
四角形ABCDの
内角は180°なので

$\underbrace{(A+C)+(B+D)}_{同じ}=360°$

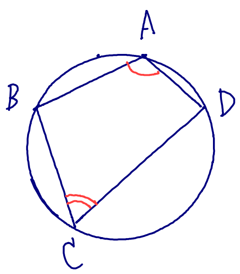
ゆえに
$A+C=\boxed{180°}$ ④コ
$C=180°-A$

$\sin C = \sin(180°-A)$
$= \sin A$

$S = S_1+S_2 = \frac{1}{2}AB\cdot AD\sin A + \frac{1}{2}BC\cdot CD\,\underbrace{\sin A}_{\sin C}$

$= \frac{\boxed{AB\cdot AD + BC\cdot CD}}{2}\sin A$ ②サ

補 $A+C=180°$のとき 四角形ABCDは円に内接する．



$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ AB・BD	① ク AB・AD	② AD・BD
③ BC・BD	④ ケ BC・CD	⑤ BD・CD
⑥ AB・CD	⑦ AD・BC	⑧ AC・BD

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ 90°	① 120°	② 135°	③ 150°
④ 180°	⑤ 240°	⑥ 270°	⑦ 360°

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ AB・BD ＋ BC・BD	① AB・BD − BC・BD
② AB・AD ＋ BC・CD	③ AB・AD − BC・CD
④ AD・BD ＋ BD・CD	⑤ AD・BD − BD・CD
⑥ AB・CD ＋ AD・BC	⑦ AB・CD − AD・BC
⑧ AC・BD	

数学Ⅰ，数学A

(2) 点Oを中心とする半径6の円Oが，線分PQ上のP，Qと異なる点Mにおいて線分PQに接している。P，Qそれぞれを通る円Oの接線で，直線PQと異なるものを引き，この円との接点をそれぞれK，Lとする。以下では直線PK，QLが交わる場合を考え，その交点をRとする。このとき，△PQRの辺の長さについて考えよう。

(i) PK = 12，QL = 9であるときを考え，∠KPM = P，∠LQM = Qとする。このとき，2直線PK，QLの交点Rは直線PQに関して点Oと同じ側にある。

PK = PM = 12
QL = QM = 9
OM = OL = OK = 6 ← 半径

四角形PMOKの面積を T_1 とすると

$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \times 2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot 2$

$= \boxed{72}$ シス

①を用いて

$T_1 = \dfrac{PM \cdot PK + OM \cdot ON}{2} \sin P = \dfrac{12 \cdot 12 + 6 \cdot 6}{2} \sin P$

$= \dfrac{144 + 36}{2} \sin P$

$= 90 \sin P$

ゆえに

$90 \sin P = 72$

よって $\sin P = \boxed{\dfrac{4}{5}}$ セ ソ

(別) ∠OPM = ∠OPK = θ とおくと $P = 2\theta$

右図より

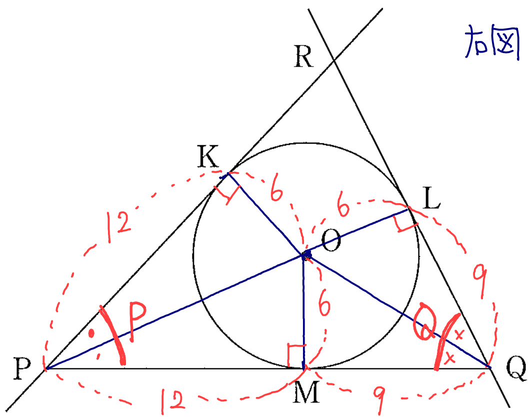
$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって

$\sin P = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$= \boxed{\dfrac{4}{5}}$

↑ 2倍角の公式



参考図

← 四角形PMOKを線分KMで分割し ∠KPM + ∠KOM = 180°

四角形PMOKが△PMOと△PKOに分けられることに注意すると，四角形PMOKの面積は $\boxed{72}$ シス であることがわかる。このことから，

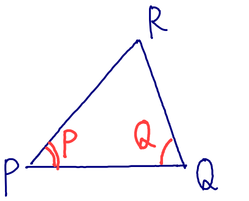
①を用いると，$\sin P = \dfrac{\boxed{4}\ セ}{\boxed{5}\ ソ}$ (3点) となることがわかる。

四角形OMQLで同様に面積を考えて

$\dfrac{9 \cdot 9 + 6 \cdot 6}{2} \sin Q = 6 \cdot 9$

$\dfrac{117}{2} \sin Q = 54$

よって $\sin Q = \dfrac{108}{117} = \boxed{\dfrac{12}{13}}$ タチ ツテ



四角形 QLOM についても同様に考えると，$\sin Q = \dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$ タチ ツテ (2点) となることもわかる。よって，PR : QR = $\boxed{15}$: $\boxed{13}$ となり，これにより
トナ ニヌ (2点)

RL = $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{2}}$ ネノ ハ (2点) と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる。

△PQRに正弦定理を用いて

$$\frac{QR}{\sin P} = \frac{PR}{\sin Q}$$

すなわち

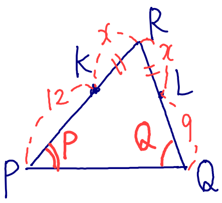
$$\frac{PR}{QR} = \frac{\sin Q}{\sin P}$$

$$PR : QR = \sin Q : \sin P = \frac{12}{13} : \frac{4}{5} \quad 2 \times \frac{65}{4}$$

$$= \boxed{15 : 13}$$

トナ ニヌ

(ii) PK $= 4\sqrt{2}$，QL $= 3\sqrt{2}$ であるときを考える。このとき，2 直線 PK，QL の交点 R は，直線 PQ に関して点 O と反対側にある。このことに注意すると RL = $\boxed{21}\sqrt{\boxed{2}}$ ヒフ ヘ (4点) と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる。



RL = RK = x とおくと

PR $= x + 12$

QR $= x + 9$

上のことから

$$(x+12) : (x+9) = 15 : 13$$

$$15(x+9) = 13(x+12)$$

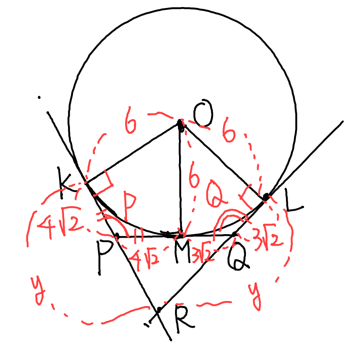
$$15x + 135 = 13x + 156$$

$$2x = 21$$

$$\therefore x = \frac{21}{2}$$

よって RL $= \boxed{\dfrac{21}{2}}$ ネノ ハ

(ii)



(i)と同じことをする

$\angle KPQ = P$

$\angle PQL = Q$

として (1)① を用いて

$$\frac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} + 6\cdot 6}{2} \sin P = 4\sqrt{2}\cdot 6$$

$$34 \sin P = 24\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin P = \frac{24}{34}\sqrt{2} = \frac{12}{17}\sqrt{2}$$

$$\frac{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 6\cdot 6}{2} \sin Q = 3\sqrt{2}\cdot 6$$

$$27 \sin Q = 18\sqrt{6}$$

$$\sin Q = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

△PQRに正弦定理を用いて

$$\frac{QR}{\sin(180^\circ - P)} = \frac{PR}{\sin(180^\circ - Q)} \quad \leftarrow \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\therefore PR : QR = \sin Q : \sin P = \frac{2}{3}\sqrt{2} : \frac{12}{17}\sqrt{2} = 17 : 18$$

RL = RK = y とおくと

PR $= y - 4\sqrt{2}$

QR $= y - 3\sqrt{2}$

$$(y - 4\sqrt{2}) : (y - 3\sqrt{2}) = 17 : 18$$

$$18(y - 4\sqrt{2}) = 17(y - 3\sqrt{2})$$

$$18y - 72\sqrt{2} = 17y - 51\sqrt{2}$$

$$y = 21\sqrt{2}$$

よって RL $= \boxed{21\sqrt{2}}$ ヒフヘ