

数学 I

〔2〕 変量 x, y の値の組のデータ

(5点)

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{20}, y_{20})$$

をデータ W と呼ぶことにする。 x, y の平均値をそれぞれ $\bar{x}, \bar{y}$ とし、分散をそれぞれ s_x^2, s_y^2 とする。また、 x と y の共分散と相関係数をそれぞれ s_{xy}, r_{xy} とする。さらに、データ W の x と y との積で得られるデータの値

$$x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \dots, x_{20} \times y_{20}$$

をそれぞれ、変量 u を用いて

$$u_1, u_2, \dots, u_{20}$$

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_{20} - \bar{x})(y_{20} - \bar{y})}{20} \\ &= \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{20} y_{20}}{20} \quad (\because \bar{x} = \bar{y} = 0) \\ &= \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{20}}{20} \\ &= \boxed{\bar{u}} \quad \text{ク} \end{aligned}$$

とおき、 u の平均値を $\bar{u}$ とする。以下では、 $\bar{x} = \bar{y} = 0, s_x^2 = s_y^2 = 1, r_{xy} > 0$ の場合を考える。

$$\begin{aligned} s_x > 0, s_y > 0 \text{ かつ } r_{xy} > 0 \\ s_x = s_y = 1 \end{aligned}$$

(1) $s_{xy} = \boxed{\text{㉓}}$ であり、このことから、 $r_{xy} = \boxed{\bar{u}}$ であることがわかる。
ク(2点)

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\bar{u}}{1 \cdot 1} = \bar{u}$$

$$0 < r_{xy} \leq 1 \text{ かつ } r_{xy} > 0 \quad 0 < \bar{u} \leq 1 \quad \text{㉑}$$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

㉐ 0	㉑ -2	㉒ 2
㉓ $\bar{u}$	㉔ $\bar{u} - 2$	㉕ $\bar{u} + 2$
㉖ $\frac{1}{2} \bar{u}$	㉗ $\frac{1}{3} \bar{u}$	㉘ $\frac{1}{4} \bar{u}$

数学 I

(2) データ W の x と y との和を 2 で割った数で得られるデータの値

$$\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \dots, \frac{x_{20} + y_{20}}{2}$$

をそれぞれ、変数 z を用いて

$$z_1, z_2, \dots, z_{20}$$

(補) x と z の共分散 S_{xz} は

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \frac{1}{20} (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_{20} z_{20}) \\ &= \frac{1}{20} \left(x_1 \cdot \frac{x_1 + y_1}{2} + x_2 \cdot \frac{x_2 + y_2}{2} + \dots + x_{20} \cdot \frac{x_{20} + y_{20}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{20}^2}{20} + \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{20} y_{20}}{20} \right) \\ &= \frac{1}{2} (S_x^2 + \bar{u}) \\ &= \frac{1 + \bar{u}}{2} \\ &= S_z^2 \end{aligned}$$

とおく。 z の平均値と分散をそれぞれ $\bar{z}$, s_z^2 とすると, $\bar{z} = 0$ であるため,

$$s_z^2 = \frac{\boxed{1} + \bar{u}}{\boxed{2}} \quad \text{である。このことから、} x \text{ と } z \text{ の相関係数を } r_{xz} \text{ とする}$$

と, $r_{xz} = \sqrt{\frac{\boxed{1} + \bar{u}}{\boxed{2}}}$ となり, (1) から, $r_{xz} \geq r_{xy}$ であることがわかる。
 (補) さや, てみました!

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_{20}}{20} = \frac{1}{20} \left(\frac{x_1 + y_1}{2} + \frac{x_2 + y_2}{2} + \dots + \frac{x_{20} + y_{20}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20} + \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{20}}{20} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{x} + \bar{y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$S_z^2 = \frac{(z_1 - \bar{z})^2 + (z_2 - \bar{z})^2 + \dots + (z_{20} - \bar{z})^2}{20} = \frac{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{20}^2}{20} \quad (\because \bar{z} = 0)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{20} \left\{ \left(\frac{x_1 + y_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_2 + y_2}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{20} + y_{20}}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{20}^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{20} y_{20}) + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{20}^2}{20} + 2 \cdot \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2}{20} + \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2}{20} \right) \\ &= \frac{1}{4} (S_x^2 + 2\bar{u} + S_y^2) \\ &= \frac{1}{4} (2 + 2\bar{u}) \quad (\because S_x^2 = S_y^2 = 1) \\ &= \frac{1 + \bar{u}}{2} \end{aligned}$$

(補) $r_{xz} = \frac{S_{xz}}{S_x S_z} \leftarrow \text{上の (補)}$
 $= \frac{S_z^2}{S_z} \quad (\because S_x = 1)$
 $= S_z$
 $= \sqrt{\frac{1 + \bar{u}}{2}}$

① から $0 < \bar{u} \leq 1$ なの?

$$\begin{aligned} \frac{-2}{u} - \frac{1 + \bar{u}}{2} &= \frac{2\bar{u}^2 - \bar{u} - 1}{2} = \frac{(\bar{u} - 1)(2\bar{u} + 1)}{2} \leq 0 \\ \therefore \frac{1 + \bar{u}}{2} &\geq \bar{u}^2 \\ \therefore \sqrt{\frac{1 + \bar{u}}{2}} &\geq \bar{u} \quad \text{さやから } r_{xz} \geq r_{xy} \end{aligned}$$