

数学 I

第 3 問 (配点 30)

〔1〕 2 次関数のグラフについて考えよう。

(15 点)

(1)

$$C: y = 3x^2$$

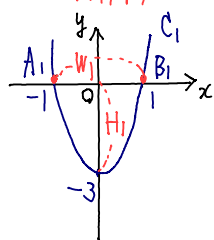
(1) 2 次関数 $y = 3x^2$ のグラフを C とする。 C を平行移動したグラフが x 軸と異なる 2 点で交わる場合を考える。この二つの交点を結ぶ線分の長さや、平行移動したグラフの頂点と x 軸との距離について考えよう。

(i) C を y 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフが C_1 なのぞ

$$C_1: y = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$y=0 \text{ と } x = -1, 1$$

A_1, B_1 の x 座標



$$W_1 = 1 - (-1) = 2$$

$$H_1 = |-3| = 3$$

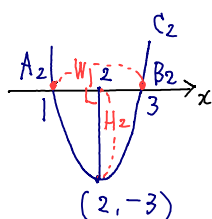
C_1 を x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフが C_2 なのぞ

$$y = 3(x-2)^2 - 3$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$y=0 \text{ と } x = 1, 3$$

A_2, B_2 の x 座標



$$W_2 = 3 - 1 = 2$$

$$H_2 = |-3| = 3$$

(i) C を y 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフを C_1 とし、 C_1 と x 軸との二つの交点を A_1, B_1 とする。線分 A_1B_1 の長さを W_1 とおき、 C_1 の頂点と x 軸との距離を H_1 とおくと、 $W_1 = \boxed{2}$ であり、 $H_1 = \boxed{3}$ である。

また、 C_1 を x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフを C_2 とし、 C_2 と x 軸との二つの交点を A_2, B_2 とする。線分 A_2B_2 の長さを W_2 とおき、 C_2 の頂点と x 軸との距離を H_2 とおく。このとき、 W_2 と W_1 、 H_2 と H_1 のそれぞれの大小関係は

$$W_2 \overset{=}{\boxed{\text{①}}} W_1, \quad H_2 \overset{=}{\boxed{\text{①}}} H_1$$

である。

☐ウ, ☐エ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

$$\text{①} < \text{②} \quad \text{①} = \text{②} \quad \text{①} > \text{②}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= W_1 \\ H_2 &= H_1 \end{aligned}$$

①ウ

①エ

← x 軸方向の平行移動だと変わらない

数学 I

(ii) k を負の定数とする。 C を x 軸方向に 2, y 軸方向に k だけ平行移動したグラフを C_3 とし, C_3 と x 軸との二つの交点を A_3, B_3 とする。ただし, 二つの交点のうち, x 座標の大きい方を B_3 とする。線分 A_3B_3 の長さを W_3 とおき, C_3 の頂点と x 軸との距離を H_3 とおく。このとき, W_3 が 2 の 4 倍となる場合を考える。

C_3 の軸は直線 $x =$ 2 であり, A_3 と B_3 は C_3 の軸に関して対称であることに注意すると, B_3 の座標は $($ 6 $,$ $0)$ であることがわかる。さらに, B_3 は C_3 上にあるから, $k = -$ 48 であることがわかる。これにより, H_3 を求めることができる。

$C: y = 3x^2$
頂点 $(0, 0)$

x 軸方向に 2
 y 軸方向に k ($k < 0$) だけ平行移動

$$C_3: y = 3(x-2)^2 + k$$

頂点 $(2, k)$

$$W_3 = 2 \times 4 = 8$$

となる場合を考える。

C_3 の軸は直線 $x =$ 2 であるから

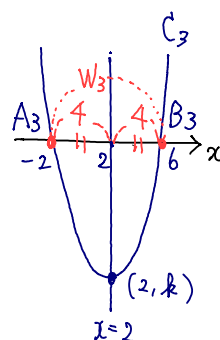
$$B_3(\underbrace{6}_{2+4}, 0) \quad \text{補} \quad A_3(\underbrace{-2}_{2-4}, 0)$$

B_3 は C_3 上にあるから

$$0 = 3(6-2)^2 + k$$

$$\text{よって } k = \boxed{-48}$$

$$H_3 = |-48| = 48$$



数学 I

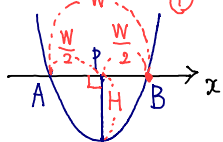
$a > 0$ より

(2) a を正の定数, p, q を定数とする。2 次関数

① のグラフは下に凸

$$y = a(x - p)^2 + q$$

..... ①



(p, q) ($q < 0$)

$q < 0$ なの?

$$H = |q| = -q$$

よって $q = -H$ ①ヶ

① の軸は
直線 $x = p$ であるから

$$B\left(p + \frac{W}{2}, 0\right) \text{ ④ヶ}$$

B は ① 上にあるの?

$$0 = a\left(p + \frac{W}{2} - p\right)^2 + q$$

$$= a \cdot \frac{W^2}{4} + q$$

$$\therefore q = -\frac{a}{4}W^2$$

よって

$$H = |q| = -q$$

$$= \frac{a}{4}W^2 \text{ ⑤ヶ}$$

を考える。① のグラフは 2 次関数 $y = ax^2$ のグラフを平行移動したグラフである。① のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとし、その二つの交点を A, B とする。ただし、二つの交点のうち、 x 座標の大きい方を B とする。線分 AB の長さを W とおき、① のグラフの頂点と x 軸との距離を H とおく。 W と H の関係を考えよう。

q を H を用いて表すと、 $q = -H$ であり、B の座標を p と W を用いて表すと、 $\left(p + \frac{W}{2}, 0\right)$ である。これらのことから、 H を a と W を用いて表すと

$$H = \frac{a}{4}W^2$$

..... ②

となる。

①ヶ の解答群

① $-2H$

② $-H$

③ $-\frac{1}{2}H$

④ $2H$

⑤ H

⑥ $\frac{1}{2}H$

②ヶ の解答群

① $p - W$

② $p - \frac{1}{2}W$

③ $p - \frac{1}{4}W$

④ $p + W$

⑤ $p + \frac{1}{2}W$

⑥ $p + \frac{1}{4}W$

③ヶ の解答群

① aW

② $\frac{a}{2}W$

③ $\frac{a}{4}W$

④ aW^2

⑤ $\frac{a}{2}W^2$

⑥ $\frac{a}{4}W^2$

← (i) (ii) と
同じことを
する!

数学 I

(3) t を定数とする。2 次関数

$$y = 2x^2 - 4tx + 2t^2 - 3t + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

を考える。③ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとし、その二つの交点を A, B とする。線分 AB の長さを W とおき、③ のグラフの頂点と x 軸との距離を H とおく。このとき、 $2 < W < 4$ を満たすような定数 t の値の範囲を求めよう。

② を利用すると、 $2 < W < 4$ のときの H のとり得る値の範囲は

$$\boxed{2} < H < \boxed{8}$$

シ ス

であることがわかる。よって、 t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{1} < t < \boxed{3}$$

セ ソ (3点)

である。

③ は

$$y = 2x^2 - 4tx + 2t^2 - 3t + 1$$

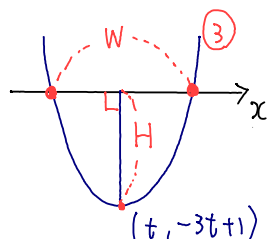
$$= 2(x-t)^2 - 3t + 1$$

グラフは下に凸

頂点 $(t, -3t+1)$ ($-3t+1 < 0$)

$$H = |-3t+1|$$

$$= 3t-1 \quad \text{--- ④}$$



② を利用すると $a=2$ とし

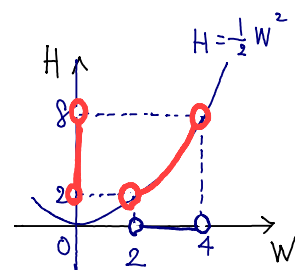
$$H = \frac{1}{2} W^2 \quad \leftarrow H \text{ は } W \text{ の 2-次関数}$$

$2 < W < 4$ のとき

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 < \frac{1}{2} W^2 < \frac{1}{2} \cdot 4^2$$

よって

$$\boxed{2 < H < 8} \quad \text{シ, ス}$$



④ を代入して

$$2 < 3t-1 < 8 \quad \text{②+1}$$

$$3 < 3t < 9 \quad \text{②} \times \frac{1}{3}$$

$$\boxed{1 < t < 3} \quad \text{セ, ソ}$$