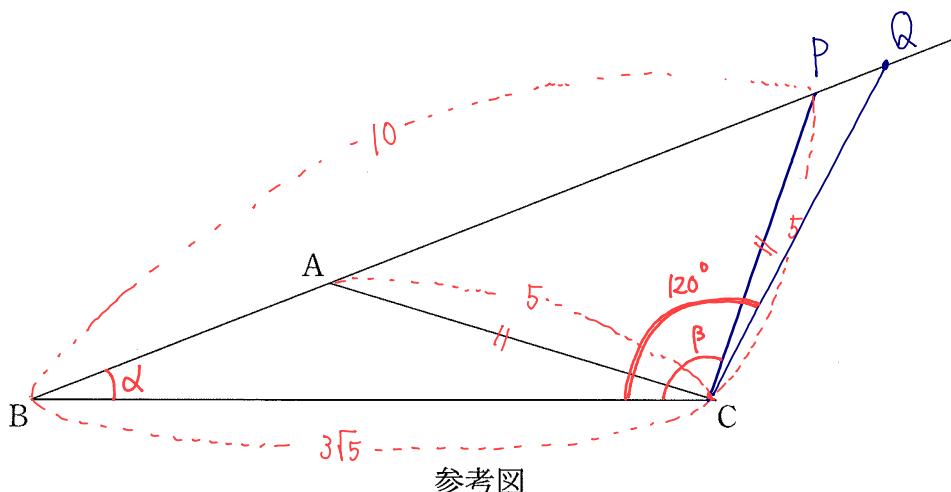


数学 I

第 2 問 (配点 30)

(1) $\triangle ABC$ において, $BC = 3\sqrt{5}$, $CA = 5$, $\cos \angle ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ とし, $\angle BCA$ (10点)

は鋭角であるとする。点 B を端点とする半直線 BA 上に 2 点 P, Q を, それぞれ $BP = 10$, $\angle BCQ = 120^\circ$ となるようにとる。辺 BC を共通とする $\triangle ABC$, $\triangle PBC$, $\triangle QBC$ の外接円の半径を, それぞれ R_1 , R_2 , R_3 とする。 R_1 , R_2 , R_3 の大小関係について考察しよう。

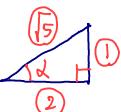


参考図

$$\angle ABC = \alpha$$

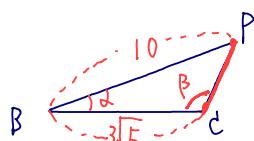
とすると

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \leftarrow \text{使うことはなかった}\sim$$

$\triangle BCP$ に余弦定理を用ひ



$$CP^2 = (3\sqrt{5})^2 + 10^2 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= 45 + 100 - 120$$

$$= 25$$

$$\text{より } CP = \boxed{5} \quad (= CA)$$

$$\angle BCP = \beta \text{ とし} \quad \cos \beta = \frac{(3\sqrt{5})^2 + 5^2 - 10^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{-300}{30\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{5}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{4}$$

$$2 < \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &> \frac{1}{\sqrt{5}} & 2 \times (-1) \\ -\frac{1}{2} &< -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\cos 120^\circ < \cos \beta$$

$$\therefore \beta < 120^\circ$$

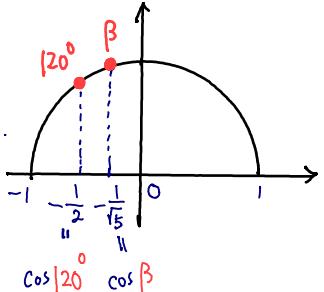
$$\text{より } \angle BCP < \angle BCQ$$

①

上図のようになる\(\alpha\)

$CP < CQ$	①
$CP = CA (= 5)$	①
$CQ > CA$	②

$$CQ > 5$$



$\triangle ABC$, $\triangle PBC$, $\triangle QBC$ に正弦定理を用ひ

$$\frac{5}{\sin \alpha} = R_1 = R_2$$

$$\frac{CQ}{\sin \beta} = R_3$$

$$5 < CQ \text{ から}$$

$$R_1 = R_2 < R_3 \quad \boxed{3}$$

③

余弦定理により

$$CP = \boxed{5}, \quad \cos \angle BCP = -\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}} \text{ イ (2点)}$$

となる。よって, $\angle BCP < \angle BCQ$ であることがわかる。したがって

$$CP \boxed{①} CQ, \quad CP \boxed{①} CA, \quad CQ \boxed{②} CA$$

となる。このことから, R_1, R_2, R_3 の大小関係は $\boxed{③}$ であることがわかる。

$\boxed{工} \sim \boxed{キ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

$\boxed{①}_{エ,オ} <$	$\boxed{①}_{カ} =$	$\boxed{②}_{キ} >$
---------------------	-------------------	-------------------

$\boxed{ク}$ の解答群

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\boxed{①} R_1 < R_2 < R_3$ | $\boxed{②} R_2 < R_3 < R_1$ | $\boxed{③} R_3 < R_1 < R_2$ |
| $\boxed{④} R_1 = R_2 < R_3$ | $\boxed{⑤} R_2 = R_3 < R_1$ | $\boxed{⑥} R_3 = R_1 < R_2$ |
| $\boxed{⑦} R_1 < R_2 = R_3$ | $\boxed{⑧} R_2 < R_3 = R_1$ | $\boxed{⑨} R_3 < R_1 = R_2$ |
| $\boxed{⑩} R_1 = R_2 = R_3$ | | |