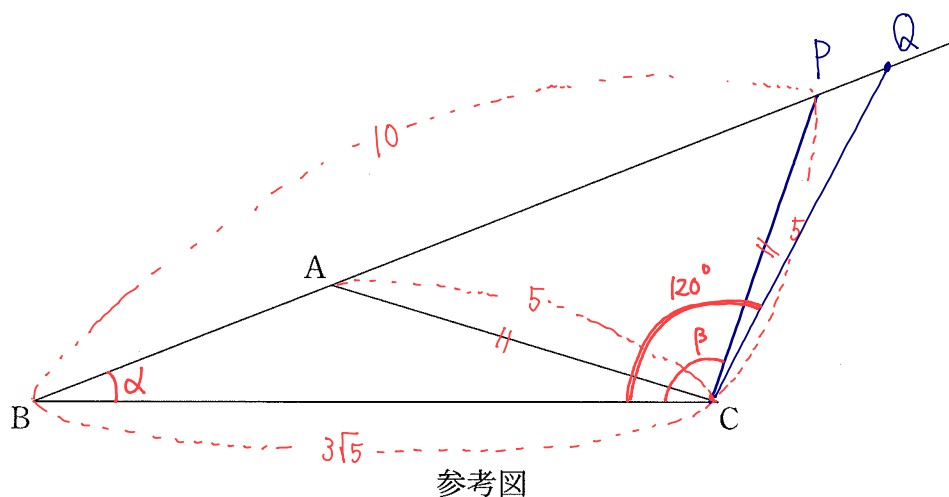


# 数学 I

## 第 2 問 (配点 30)

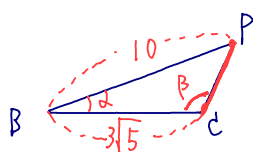
〔1〕  $\triangle ABC$  において、 $BC = 3\sqrt{5}$ 、 $CA = 5$ 、 $\cos \angle ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  とし、 $\angle BCA$  (10点)

は鋭角であるとする。点  $B$  を端点とする半直線  $BA$  上に 2 点  $P$ 、 $Q$  を、それぞれ  $BP = 10$ 、 $\angle BCQ = 120^\circ$  となるようにとる。辺  $BC$  を共通とする  $\triangle ABC$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle QBC$  の外接円の半径を、それぞれ  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  とする。 $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  の大小関係について考察しよう。



$\angle ABC = \alpha$   
 とすると  
 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$   
 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  ← 使うことはなかった

$\triangle BCP$  に余弦定理を用いる



$$CP^2 = (3\sqrt{5})^2 + 10^2 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= 45 + 100 - 120$$

$$= 25$$

よって  $CP = 5 (= CA)$

$\angle BCP = \beta$  とすると  $\cos \beta = \frac{(3\sqrt{5})^2 + 5^2 - 10^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{-300}{30\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $= -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2 < \sqrt{5}$   
 なの  
 $\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{5}} \quad 2 \times (-1)$   
 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 120^\circ < \cos \beta$

$\therefore \beta < 120^\circ$

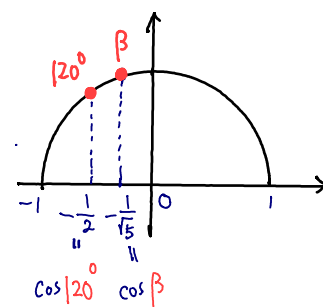
よって  $\angle BCP < \angle BCQ$

①

上図のようになる

$CP < CQ$	①
$CP = CA (= 5)$	①
$CQ > CA$	②

$CQ > 5$



$\triangle ABC$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle QBC$  について正弦定理を用いる

$$\frac{5}{\sin \alpha} = R_1 = R_2$$

$$\frac{CQ}{\sin \alpha} = R_3$$

$5 < CQ$  であるから

$R_1 = R_2 < R_3$
-------------------

③

余弦定理により

$$CP = \boxed{5}, \quad \cos \angle BCP = -\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}$$

ア (2点)                      イ (2点)

となる。よって、 $\angle BCP = \boxed{0}$ 、 $\angle BCQ = 120^\circ$  であることがわかる。したがって

エ (2点)

$$CP \boxed{0} CQ, \quad CP \boxed{1} CA, \quad CQ \boxed{2} CA$$

オ                      カ                      キ (2点)

となる。このことから、 $R_1, R_2, R_3$  の大小関係は  $\boxed{3}$  であることがわかる。

ク (2点)

$\boxed{エ}$  ~  $\boxed{キ}$  の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

$$\boxed{0} < \quad \boxed{1} = \quad \boxed{2} >$$

エ, オ                      カ                      キ

$\boxed{ク}$  の解答群

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| ① $R_1 < R_2 < R_3$ | ② $R_2 < R_3 < R_1$ | ③ $R_3 < R_1 < R_2$ |
| ④ $R_1 = R_2 < R_3$ | ⑤ $R_2 = R_3 < R_1$ | ⑥ $R_3 = R_1 < R_2$ |
| ⑦ $R_1 < R_2 = R_3$ | ⑧ $R_2 < R_3 = R_1$ | ⑨ $R_3 < R_1 = R_2$ |
| ⑩ $R_1 = R_2 = R_3$ |                     |                     |