数　学　I

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔１〕　定数 a を $a \neq 1$ とするとき，x についての連立不等式

(10点)

$$\begin{cases} x - \sqrt{6}\,a + 1 \geqq 0 & \cdots\cdots ① \\ (a-1)x - 2a^2 - a + 3 \leqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の解について考える。なお，$\sqrt{6} = 2.449\cdots$ である。

2.45　(3)で使える

(1)　$a = 2$ のとき，連立不等式の解は

$$\boxed{2}\sqrt{6} - \boxed{1} \leqq x \leqq \boxed{7}$$

ア　イ　ウ (2点)

である。

(2)　不等式 ① の解は $x \geqq \boxed{①}$ である。（$\sqrt{6}a-1$）エ

一方，不等式 ② は

$$(a-1)\left\{x - \left(\boxed{④}\right)\right\} \leqq 0$$

（$2a+3$）オ (2点)

と変形できる。$a-1$ が正の場合と負の場合に分けて，連立不等式の解を求める。

・$a - 1 > 0$ のときを考える。

不等式 ② の解は $x \leqq \boxed{④}$（$2a+3$）カ となり，連立不等式を満たす実数 x があるための必要十分条件は

$$1 < a \leqq \boxed{2}\sqrt{6} + \boxed{4}$$

キ　ク (2点)

である。このときの連立不等式の解は $\boxed{\sqrt{6}a-1}$ エ $\leqq x \leqq \boxed{2a+3}$ カ である。

補　$2a+3 < \sqrt{6}a-1$ ならば 解なし

(1)　$a=2$ のとき

① は　$x - 2\sqrt{6} + 1 \geqq 0$

$\therefore\ x \geqq 2\sqrt{6} - 1$　…①′

② は　$x - 7 \leqq 0$

$\therefore\ x \leqq 7$　…②′

①′かつ②′より $\boxed{2\sqrt{6} - 1 \leqq x \leqq 7}$　ア，イ，ウ

(2)　① の解は $\boxed{x \geqq \sqrt{6}a - 1}$　エ　…①″

② は　$(a-1)x - (2a^2+a-3) \leqq 0$

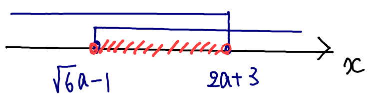
$(a-1)x - (a-1)(2a+3) \leqq 0$

場合分け　$(a-1)\{x - (\boxed{2a+3})\} \leqq 0$　…②″　オ　積が0以下

㋐ $a-1>0$ つまり $a>1$ のとき

②″は　$x - (2a+3) \leqq 0$

$\therefore\ \boxed{x \leqq 2a+3}$　④カ



$\sqrt{6}a-1 \leqq 2a+3$ つまり

$(\sqrt{6}-2)a \leqq 4$

両辺を $\sqrt{6}-2\ (>0)$ でわって

$a \leqq \dfrac{4}{\sqrt{6}-2}$

$= \dfrac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \dfrac{4(\sqrt{6}+2)}{2}$

$a>1$ と合わせて　$\boxed{1 < a \leqq 2\sqrt{6}+4}$　キ，ク

このとき 解は　$\sqrt{6}a-1 \leqq x \leqq 2a+3$

• $a-1<0$ のときを考える。

連立不等式の解は $x \geqq$ $\boxed{④}$ である。
ケ

$\boxed{エ}$ ～ $\boxed{カ}$ ， $\boxed{ケ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\sqrt{6}a+1$	① $\sqrt{6}a-1$ エ	② $-\sqrt{6}a+1$
③ $-\sqrt{6}a-1$	④ $2a+3$ オ,カ,ケ	⑤ $2a-3$
⑥ $-2a+3$	⑦ $-2a-3$	

(3) a を整数とするとき，連立不等式を満たす x で，x が整数となるものが一つだけであるような a の値を求める。

(2)から，$a-1<0$ のときは，連立不等式を満たす整数が二つ以上あることがわかる。したがって，$a-1>0$ のときだけを考えればよい。

a が整数のときは $\boxed{2a+3}$ も整数になる。このことに注意して a の値をすべて求めると，$a=$ $\boxed{①}$ である。
カ
7.8　コ（2点）

このとき，連立不等式を満たすただ一つの整数は，求めた a の値を $\boxed{2a+3}$ に代入したものである。
カ

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ 6，7	① 7，8	② 8，9
③ 5，6，7	④ 6，7，8	⑤ 7，8，9

(11) $a-1<0$ つまり $a<1$ のとき

②は $x-(2a+3)\geqq 0$

$\therefore x\geqq 2a+3$

$a<1$ なので $\sqrt{6}a-1\leqq 2a+3$

$\sqrt{6}a-1$　$2a+3$　x

解は $\boxed{x\geqq 2a+3}$ ④ ケ

(3) aを整数として

(1) aとき

$x\geqq 2a+3$

をみたす整数 x は

2つ以上ある

(あ) $1<a<2\sqrt{6}+4$ のとき

$\sqrt{6}\fallingdotseq 2.45$ として　$1<a<8.9$ …③

この整数は入らない　$2a+2$　$\sqrt{6}a-1$　$2a+3$　x

ただ1つの整数解

1つだけの整数解は $2a+1$ なので

$2a+2<\sqrt{6}a-1$

$(\sqrt{6}-2)a>3$

$\sqrt{6}\fallingdotseq 2.45$ として　$0.45a>3$

$a>\dfrac{3}{0.45}$

$=\dfrac{100}{15}=\dfrac{20}{3}$

$=6.66\cdots$ …④

③かつ④として　$6.66\cdots<a<8.9$

これをみたす整数 a の値は

$\boxed{a=7,8}$ ①コ

(補) $\sqrt{6}=2.449\cdots$ であるので $\sqrt{6}\fallingdotseq 2.45$ としたが

マーク方式だから近似した。

きちんと説明するならば　$2.44<\sqrt{6}<2.45$

$2.4<\sqrt{6}<2.5$

などの不等式を用いる