数学Ⅱ，数学B，数学C　第４問～第７問は，いずれか３問を選択し，解答しなさい。

第７問　（選択問題）（配点　16）

(1)　複素数平面上で方程式

$$|z-1|+|z+1|=4 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす点 z 全体がどのような図形かを考える。

$|z-1|$ は点 z と点 1 の距離

$|z+1|=|z-(-1)|$ は点 z と点 -1 の距離

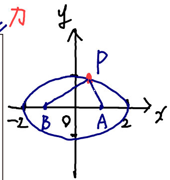
(i)　方程式①は $\boxed{\ ①\ }$ が一定であることを表している。

ア（2点）

$A(1)$, $B(-1)$, $P(z)$ とすると①は

$AP+BP=4$　$\boxed{①}$ア

これは点 $P(z)$ が2点 A, B を焦点，長軸の長さが4のだ円を表す　$\boxed{②}$カ



$\boxed{ア}$ の解答群

⓪	点 z と点 $1-i$ の距離
①	点 z と点 1 の距離と，点 z と点 -1 の距離の和
②	点 z と点 $1+i$ の距離と，点 z と点 $-1-i$ の距離の和
③	点 z と点 $1-i$ の距離の２乗
④	点 z と点 1 の距離の２乗と，点 z と点 -1 の距離の２乗の和
⑤	点 z と点 $1+i$ の距離の２乗と，点 z と点 $-1-i$ の距離の２乗の和

$z=x+yi$ とおくと

$z-1=(x-1)+yi$

$z+1=(x+1)+yi$

①は

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4$

より

$\boxed{\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4-\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$

と変形できる　④イ　②ウ

両辺を2乗して

$(x-1)^2+y^2=16-8\sqrt{(x+1)^2+y^2}+(x+1)^2+y^2$

$8\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4x+16$　$\times\frac{1}{4}$

$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\boxed{x+4}$　③エ

さらに両辺を2乗して

$4\{(x+1)^2+y^2\}=x^2+8x+16$

$3x^2+4y^2=12$

よって $\boxed{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1}$　①オ　…②

(ii)　x，y を実数とし，$z=x+yi$ とおくと，方程式①は

$$\sqrt{(x-1)^2+\boxed{\ ④\ }^2}=4-\sqrt{\boxed{\ ②\ }^2+y^2}$$

y^2　イ　　$(x+1)^2$　ウ（1点）

と変形できる。

両辺を２乗して計算すると

$$\boxed{\ ③\ }=2\sqrt{\boxed{(x+1)^2}^2+y^2}$$

$x+4$　エ（1点）

となる。

さらに両辺を２乗して計算すると

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\ \boxed{\ ①\ }=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

オ（2点）

となる。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $(x-1)$	① x	ウ ② $(x+1)$
③ $(y-1)$	イ ④ y	⑤ $(y+1)$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{15}{4}$	① $x-\dfrac{y}{2}+\dfrac{15}{4}$	② $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{7}{2}$
③ $x+4$	④ $-x-4$	⑤ $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{7}{2}$
⑥ $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{7}{2}$	⑦ $-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{7}{2}$	

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}$	① $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}$
② $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}$	③ $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}$

④ $\dfrac{1}{4}\{(x-1)^2+(x+1)^2+2y^2\}$

⑤ $\dfrac{1}{16}\{(x-1)^2+(x+1)^2+2y^2\}$

(iii) (i), (ii) から，複素数平面上で方程式 ① を満たす点 z 全体は，複素数平面上における $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

カ（2点）

ただし，複素数平面上で方程式 ① を満たす点 $z = x + yi$ 全体は，座標平面上で方程式 ② を満たす点 $(x,\ y)$ 全体と同じ図形であることに注意する。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

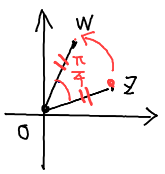
⓪	点 $1 - i$ を中心とする半径 4 の円
①	点 $-1 + i$ を中心とする半径 4 の円
②	2 点 1，-1 を焦点とし，長軸の長さが 4 の楕円
③	2 点 i，$-i$ を焦点とし，長軸の長さが 4 の楕円
④	2 点 1，-1 を焦点とし，長軸の長さが 8 の楕円
⑤	2 点 i，$-i$ を焦点とし，長軸の長さが 8 の楕円
⑥	2 点 $\sqrt{7}$，$-\sqrt{7}$ を焦点とし，2 点 $\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$ が頂点の双曲線
⑦	2 点 $\sqrt{7}\,i$，$-\sqrt{7}\,i$ を焦点とし，2 点 $\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ が頂点の双曲線
⑧	2 点 $\sqrt{7}$，$-\sqrt{7}$ を焦点とし，2 点 2，-2 が頂点の双曲線
⑨	2 点 $\sqrt{7}\,i$，$-\sqrt{7}\,i$ を焦点とし，2 点 $2i$，$-2i$ が頂点の双曲線

(2) 点 z を複素数平面上における $\boxed{\text{カ}}$ 上の点であるとし，点 w は，点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点とする。このとき，点 w が満たす方程式を求めたい。

点 w と点 z は，関係式 $\boxed{\text{キ}}$ を満たす。また，点 z は複素数平面上で方程式 ① を満たす。したがって，点 w は方程式

$$\boxed{\text{ク}} = 4$$

を満たす。



$\boxed{w = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) z}$

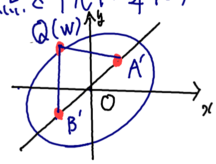
をみたす

⑦キ

点 w が表す図形も中心が原点，長軸の長さが 4 のだ円であり

点 z が表すだ円の焦点 A(1), B(−1) を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点をそれぞれ A′, B′ とすると

$A'\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, $B'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$



Q (w) とすると

$A'Q + B'Q = 4$

をみたすので

$$\boxed{\left|w - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right| + \left|w + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right| = 4}$$

④ク

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ $z = \dfrac{\pi}{4} + w$	① $w = \dfrac{\pi}{4} + z$
② $z = \dfrac{\pi}{4} w$	③ $w = \dfrac{\pi}{4} z$
④ $z = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} + w$	⑤ $w = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} + z$
⑥ $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)w$	⑦ $w = \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)z$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\left|w - \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + \left|w + \left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

① $\left|w - \left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + \left|w + \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

② $\left|w - \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| + \left|w + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right|$

③ $\left|w - \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| + \left|w + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right|$

④ $\left|w - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| + \left|w + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right|$

⑤ $\left|w - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| + \left|w + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right|$

補 $|z-1| + |z+1| = 4$

に

$z = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} w$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) w$

を代入して

$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w - 1\right| + \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w + 1\right| = 4$

$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(w - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(w + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i}\right)\right| = 4$

$\underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right|}_{=1}\left|w - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right| + \underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right|}_{=1}\left|w + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right| = 4$

よって $\left|w - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right| + \left|w + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right| = 4$

数学Ⅱ，数学B，数学C

(3)　点 z を複素数平面上における $\boxed{\text{カ}}$ 上の点であるとし，点 α は，点 z を原点を中心に一定の角 θ だけ回転した点とする。このとき，次の⓪～⑤のうち，θ を適切に定めることにより，点 α が満たす方程式となるのは $\boxed{⑤}$ である。

ケ(3点)

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪	$\lvert\alpha-1\rvert+\lvert\alpha+1\rvert=6$　　← 長軸の長さが6
①	$\lvert\alpha-1\rvert+\lvert\alpha-3\rvert=4$
②	$\left\lvert\alpha-\dfrac{1}{2}\right\rvert+\left\lvert\alpha+\dfrac{1}{2}\right\rvert=4$
③	$\lvert\alpha-(1+\sqrt{3}\,i)\rvert+\lvert\alpha+(1-\sqrt{3}\,i)\rvert=4$
④	$\lvert\alpha-\sqrt{2}\rvert+\lvert\alpha-\sqrt{2}\,i\rvert=4$
⑤	$\lvert\alpha-i\rvert+\lvert\alpha+i\rvert=4$

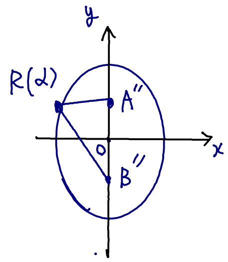
点αが表す図形も中心が原点，長軸の長さが4のだ円であり，
点zが表すだ円の焦点A(1), B(−1)を原点を中心にθだけ回転した点をそれぞれA″, B″とすると
原点をOとして

$$OA=OB=1$$

なので

$$OA''=OB''=1$$

をみたす2点A″, B″が点αが表すだ円の焦点となる.



このもとで　R(α)として

$$A''R+B''R=4$$

をみたすものを考えると

$$A''(i),\ B''(-i)$$

がある.
つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ として

$$\boxed{\lvert\alpha-i\rvert+\lvert\alpha+i\rvert=4}$$

⑤ケ

と定めることができる