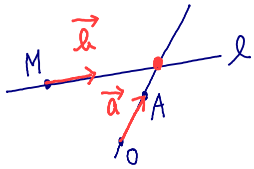
第6問 （選択問題）（配点　16）

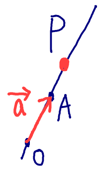
Oを原点とする座標空間に，2点A(0，−3，1)，B(1，0，3)がある。Mを空間内の点とし，点Mを通り，直線OBと平行な直線をℓとする。直線OAと直線ℓが交わるかどうかを考えよう。



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OM}=\vec{m}$とおく。

(1) 空間の2直線が交わることについて，ベクトルを用いて考えてみよう。

(i) 点Pが直線OA上にあるとき



$$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}$$

を満たす実数sがある。

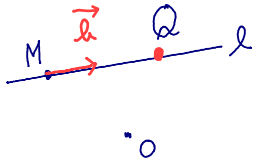
点Qが直線ℓ上にあるとき，$\overrightarrow{MQ}=t\vec{b}$を満たす実数$t$があり

$\overrightarrow{OQ}=$ $\boxed{③}$ $\vec{m}+t\vec{\ell}$

ア(2点

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MQ}$

$=\boxed{\vec{m}+t\vec{\ell}}$ ③ア



となる。

したがって

$s\vec{a}=$ $\boxed{\vec{m}+t\vec{\ell}}$ ← $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$ ……………………………… ①

を満たす実数s，tがあることは，直線OAと直線ℓが交わるための必要十分条件である。

①は
$$s\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}=\vec{m}+t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \quad \cdots ①'$$
← 縦ベクトルでかく!

$\boxed{ア}$ の解答群

⓪ $\vec{b}+t\vec{m}$	① $\vec{b}-t\vec{m}$	② $-\vec{b}+t\vec{m}$
③ $\vec{m}+t\vec{b}$	④ $\vec{m}-t\vec{b}$	⑤ $-\vec{m}+t\vec{b}$

(ii) $\vec{m}=(2,3,5)$
とすると ①′ は

$s\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\-3s\\s\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2+t\\3\\5+3t\end{pmatrix}}$ イ ウ エ

$\begin{cases}0=2+t\\-3s=3\\s=5+3t\end{cases}$

$\therefore\ s=\boxed{-1},\ t=\boxed{-2}$ オカ キク

$\overrightarrow{OP}=-\vec{a}=-\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$

直線OAとℓの交点は
$\boxed{(0,3,-1)}$ ケ コ サシ

(ii) $\vec{m}=(2,3,5)$ とする。① を満たす実数 s, t があると仮定すると，次が成り立つ。

$$(0,\ -3s,\ s)=\left(\boxed{\overset{2+t}{③}},\ \boxed{\overset{3}{①}},\ \boxed{\overset{5+3t}{⑤}}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

イ　ウ　エ（2点）

② の両辺の x 成分と y 成分がそれぞれ一致するので，$s=\boxed{-1}$，

オカ

$t=\boxed{-2}$ である。このとき ② の両辺の z 成分も一致する。したがって，

キク（2点）

直線 OA と直線 ℓ は交わり，交点の座標は，$\left(\boxed{0},\ \boxed{3},\ \boxed{-1}\right)$

ケ　コ　サシ（2点）

となる。

(iii) $\vec{m}=(2,3,-5)$
とすると ①′ は

$s\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\-3s\\s\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2+t\\3\\-5+3t\end{pmatrix}}$ ス

$\begin{cases}0=2+t\\-3s=3\\s=-5+3t\ \cdots ②'\end{cases}$

$s=-1,\ t=-2$
となるが ②′ は
$-1=-5-6$
$=-11$
となり 矛盾する

(iii) $\vec{m}=(2,3,-5)$ とする。① を満たす実数 s, t があると仮定すると，次が成り立つ。

$$(0,\ -3s,\ s)=\left(\boxed{2+t},\ \boxed{3},\ \boxed{\overset{-5+3t}{⑦}}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

ス（1点）

③ の両辺の x 成分と y 成分がそれぞれ一致するので，$s=\boxed{-1}$，

$t=\boxed{-2}$ である。しかし，このとき ③ の両辺の z 成分は一致しないので，③ が成り立つことに矛盾する。したがって，直線 OA と直線 ℓ は交わらない。

$\boxed{イ}$ ～ $\boxed{エ}$，$\boxed{ス}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪	2	① ウ	3	②	5
③ イ	$2+t$	④	$2-t$	⑤ エ	$5+3t$
⑥	$5-3t$	⑦ ス	$-5+3t$	⑧	$-5-3t$

(2) 直線 OA と直線 ℓ が交わるための $\vec{m}$ の条件について考えよう。

$\vec{e}=(0,0,1)$ とする。M が空間内のどのような点であっても，$\vec{m}$ は，実数 α，β，γ を用いて

①から
$\vec{m}=s\vec{a}-t\vec{\ell}$

$$\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{e} \qquad \cdots\cdots ④$$

の形でただ一通りに表すことができる。

(i) $\vec{m}=(2,3,5)$ とすると
$s=-1$, $t=-2$ なので
$\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{\ell}$
よって④から
$\boxed{\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=0}$
セソ　タ　チ

(i) $\vec{m}=(2,3,5)$ とする。(1)の(ii)より，$s=$ オカ ，$t=$ キク のとき s，t は①を満たす。したがって，④を満たす実数 α，β，γ は，

$\alpha=\boxed{-1}$，$\beta=\boxed{2}$，$\gamma=\boxed{0}$ である。
セソ　タ　チ（2点）

(ii) $\vec{m}=(2,3,-5)$ とすると

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

より

$\vec{m}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}-\boxed{10}\vec{e}$
ツテ
$=-\vec{a}+2\vec{\ell}-10\vec{e}$
(∵(i))
よって④から
$\alpha=-1$, $\beta=2$,
$\gamma=\boxed{-10}$
トナニ

(ii) $\vec{m}=(2,3,-5)$ とする。$\vec{m}=(2,3,5)-\boxed{10}\,\vec{e}$ より，④を満たす
ツテ

実数 α，β，γ は，$\alpha=$ セソ ，$\beta=$ タ ，$\gamma=\boxed{-10}$ である。
トナニ（1点）

(iii) 直線 OA と直線 ℓ が交わるとき，①を満たす実数 s，t があるので，

$\vec{m}=\boxed{⓪}\ \vec{a}+\boxed{③}\ \vec{b}$ となる。したがって，$\vec{m}$ を④の形で表すとき，
（s）ヌ　（$-t$）ネ（2点）

$\gamma=0$ である。

(iii)
①から
$\vec{m}=\boxed{s\vec{a}-t\vec{\ell}}$
⓪ヌ　③ネ
(i)より $\gamma=0$
となることが必要
である。

逆に，$\gamma=0$ であるとき，直線 OA と直線 ℓ が交わることが確かめられる。

以上のことから

実数 α，β を用いて $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ と表せる …＊

ことは，直線 OA と直線 ℓ が交わるための必要十分条件である。

ヌ ，ネ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

ヌ ⓪ s	① $(-s)$	② t	ネ ③ $(-t)$
④ $(s+t)$	⑤ $(s-t)$	⑥ $(-s+t)$	⑦ $(-s-t)$

(3) $\vec{c}=(2,3,5)$, $\vec{d}=(2,3,-5)$とおく。(1)の(ii)と(iii)から, $\vec{m}=\vec{c}$のとき, 直線OAと直線ℓは交わるが, $\vec{m}=\vec{d}$のときは, 直線OAと直線ℓは交わらない。(2)を利用すると, 次のことがわかる。

(Ⅰ) $\vec{m}=13\vec{c}$のとき, 直線OAと直線ℓは $\boxed{⓪}$。 ノ

(Ⅱ) $\vec{m}=\vec{b}+9\vec{d}$のとき, 直線OAと直線ℓは $\boxed{①}$。 ハ

(Ⅲ) $\vec{m}=8\vec{a}-11\vec{d}$のとき, 直線OAと直線$\ell$は $\boxed{①}$。 ヒ (2点)

$\boxed{ノ}$ ～ $\boxed{ヒ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 交わる	① 交わらない

$\vec{c}=(2,3,5)$, $\vec{d}=(2,3,-5)$

とおくと (2) より

$\vec{c}=-\vec{a}+2\vec{b}$

$\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}-10\vec{e}$

と表せる.

(Ⅰ) $\vec{m}=13\vec{c}$

$=-13\vec{a}+26\vec{b}$ ← $\alpha=-13,\ \beta=26,\ \gamma=0$

㊟ をみたすので 直線OAとℓは $\boxed{交わる}$ ⓪

(Ⅱ) $\vec{m}=\vec{b}+9\vec{d}$

$=\vec{b}+9(-\vec{a}+2\vec{b}-10\vec{e})$ ← $\alpha=-9,\ \beta=19,\ \gamma=-90\neq 0$

$=-9\vec{a}+19\vec{b}-90\vec{e}$

㊟ をみたさないので 直線OAとℓは $\boxed{交わらない}$ ①ハ

(Ⅲ) $\vec{m}=8\vec{a}-11\vec{d}$

$=8\vec{a}-11(-\vec{a}+2\vec{b}-10\vec{e})$ ← $\alpha=19,\ \beta=-22,\ \gamma=110\neq 0$

$=19\vec{a}-22\vec{b}+110\vec{e}$

㊟ をみたさないので 直線OAとℓは $\boxed{交わらない}$ ①ヒ