

第5問 (選択問題) (配点 16)

以下の問題を解答するにあたっては, 必要に応じて27ページの正規分布表を用いてもよい。

次のように設定されているくじを考える。くじを1回引いて得られる点を得点と呼ぶ。

くじの設定

中身の見えない箱の中に

000, 001, 002, ..., 998, 999

の番号が, それぞれ一つずつ書かれたカードが1枚ずつ合計1000枚入っている。この箱の中から無作為に1枚のカードを取り出して番号を確認し, そのカードを箱の中に戻す試行を繰り返し行う。このとき, 取り出したカードに書かれた番号によって, 以下に示される点を得られるものとする。

- 番号が「777」ならば, 2000点
- 番号の下二桁が「22」ならば, 800点
- 番号の下一桁が「1」ならば, 100点
- 上記以外ならば, 0点

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (1) 得点を確率変数 X で表す。このとき, X のとり得る値は $x_1 = 2000$, $x_2 = 800$, $x_3 = 100$, $x_4 = 0$ である。 X の確率分布は次の表で与えられる。

	2000	800	100	0	
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	
X	x_1	x_2	x_3	x_4	計
P	p_1	p_2	p_3	p_4	1
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	
	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$		

ここで

$$p_1 = P(X = 2000) = \frac{1}{1000}$$

$$p_2 = P(X = 800) = \frac{\boxed{1}}{100} \text{ ア(1点)}$$

$$p_3 = P(X = 100) = \frac{1}{10}$$

$$p_4 = P(X = 0) = \frac{\boxed{889}}{1000} \text{ イウエ(1点)}$$

である。

確率変数 X の平均(期待値) $E(X)$ は

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

であるから

$$E(X) = \boxed{20} \text{ オカ(1点)}$$

となる。また, 確率変数 X の分散 $V(X)$ は

$$V(X) = \{\overset{2000-20}{x_1 - E(X)}\}^2 p_1 + \{\overset{800-20}{x_2 - E(X)}\}^2 p_2 + \{\underset{100-20}{x_3 - E(X)}\}^2 p_3 + \{\underset{0-20}{x_4 - E(X)}\}^2 p_4$$

であるから

$$V(X) = 11000$$

となる。

$X=800$ となるのは 下2桁が「22」となることから

$$p_2 = P(X=800) = \frac{\boxed{1}}{100} \text{ ア}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \quad \leftarrow \text{余事象の確率}$$

$$\begin{aligned} p_4 &= 1 - (p_1 + p_2 + p_3) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10} \right) \\ &= 1 - \frac{1+10+100}{1000} = 1 - \frac{111}{1000} \\ &= \frac{\boxed{889}}{1000} \text{ イウエ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 2000 \cdot \frac{1}{1000} + 800 \cdot \frac{1}{100} + 100 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{889}{1000} \\ &= 2 + 8 + 10 \\ &= \boxed{20} \text{ オカ} \end{aligned}$$

..... ①

← 計算しなくても結果がわかっている

..... ②

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (2) くじの参加者にはあらかじめ十分な持ち点を与えられている。くじを1回引くたびに25点を引かれるとする。1回のくじ引きに対して、**得点から25点を引いた差を損得点**と呼ぶ。

$$Y = X - \boxed{25} \quad \text{キク}$$

- (i) 損得点を確率変数 Y で表す。 Y は、(1) の確率変数 X を用いて

$$Y = X - \boxed{\text{キク}}$$

と表せる。 $\boxed{\text{キク}} = c$ とおくと、 Y のとり得る値は $y_1 = x_1 - c$, $y_2 = x_2 - c$, $y_3 = x_3 - c$, $y_4 = x_4 - c$ である。 Y の確率分布は、(1) の p_1 , p_2 , p_3 , p_4 を用いて次の表で与えられる。

	975	775	75	-25	
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	計
P	p_1	p_2	p_3	p_4	1
	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{289}{100}$	

$$y_1 = 1000 - 25$$

$$= 975$$

$$y_2 = 800 - 25$$

$$= 775$$

$$y_3 = 100 - 25$$

$$= 75$$

$$y_4 = 0 - 25$$

$$= -25$$

$$c = 25$$

$$Y = X - c$$

確率変数 Y の平均(期待値) $E(Y)$ は、(1) の $E(X)$ を用いて

$$E(Y) = \boxed{\text{①}} \quad \text{ケ(1点)}$$

となる。また、確率変数 Y の分散 $V(Y)$ は、(1) の $V(X)$ を用いて

$$V(Y) = \boxed{\text{②}} \quad \text{コ(2点)}$$

となる。

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X - 25) \\ &= \boxed{E(X) - 25} \quad \text{①} \\ &= 20 - 25 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(X - 25) \\ &= 1^2 \cdot V(X) \\ &= \boxed{V(X)} \quad \text{②} \\ &= 1000 \end{aligned}$$

- (ii) くじ引きを400回繰り返すとき、各回の得点を表す確率変数を X_1 , X_2 , $\dots$, X_{400} とする。また

$$Y_1 = X_1 - c, Y_2 = X_2 - c, \dots, Y_{400} = X_{400} - c$$

とすると、 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{400}$ は母平均 $E(Y)$, 母標準偏差 $\sqrt{V(Y)}$ の母集団から無作為に抽出した大きさ400の無作為標本とみなせる。

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

標本の大きさ 400 は十分に大きいから, 標本平均

$$\bar{Y} = \frac{1}{400} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{400})$$

は近似的に正規分布 $N(E(Y), \boxed{5})$ に従う。

このことから, くじ引きを 400 回繰り返すとき, 損得点の合計 $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{400}$ が 0 以上となる確率は, ① と ② から

$$P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{400} \geq 0) = \boxed{0.17}$$

である。ただし, $\boxed{\text{シ}}$ の計算においては, $\sqrt{110} = 10.5$ とする。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- ① $E(X)$ ② $E(X) - c$ ③ $E(X) + c$
 ④ $cE(X)$ ⑤ $\frac{E(X)}{c}$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

- ① $V(X)$ ② $V(X) - c$ ③ $V(X) + c$
 ④ $V(X) - c^2$ ⑤ $V(X) + c^2$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- ① $\frac{\sqrt{V(Y)}}{20}$ ② $\sqrt{V(Y)} - c$ ③ $V(Y)$
 ④ $V(Y) + c^2$ ⑤ $V(Y) - c^2$ ⑥ $\frac{V(Y)}{400}$
 ⑦ $\frac{V(Y) - c^2}{400}$ ⑧ $\frac{V(Y) + c^2}{400}$

$\boxed{\text{シ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

- ① 0.17 ② 0.33 ③ 0.47
 ④ 0.68 ⑤ 0.82 ⑥ 0.97

$$\begin{aligned} V(\bar{Y}) &= \frac{1}{(400)^2} \{ V(Y_1) + V(Y_2) + \dots + V(Y_{400}) \} \\ &= \frac{1}{(400)^2} \{ \underbrace{V(Y) + V(Y) + \dots + V(Y)}_{400 \text{ 回}} \} \\ &= \frac{1}{(400)^2} \cdot 400 V(Y) = \frac{V(Y)}{400} \end{aligned}$$

$$\bar{Y} \text{ は } N(E(Y), \frac{V(Y)}{400})$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X) - 25 \\ &= 20 - 25 \\ &= -5 \\ \sqrt{\frac{V(Y)}{400}} &= \sqrt{\frac{V(X)}{400}} \\ &= \sqrt{\frac{11000}{400}} \\ &= \frac{10\sqrt{110}}{20} \\ &= \frac{10.5}{2} \\ &= 5.25 \end{aligned}$$

$$\bar{Y} \text{ は } N(-5, (5.25)^2)$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{Y} - (-5)}{5.25} \\ &= \frac{\bar{Y} + 5}{5.25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{とすると } Z \text{ は } N(0, 1) \text{ に従う。} \\ &P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \geq 0) \\ &= P(\bar{Y} \geq 0) \\ &= P\left(\frac{\bar{Y} + 5}{5.25} \geq \frac{5}{5.25}\right) \\ &= P(Z \geq 0.95) \end{aligned}$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.95)$$

$$\begin{aligned} &= 0.5 - 0.3289 \\ &= 0.1711 \\ &\approx 0.17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{5.25} &= \frac{500}{525} = \frac{100}{105} = \frac{20}{21} \\ &= 0.952 \dots \\ &\approx 0.95 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0.952 \\ 21 \overline{) 200} \\ \underline{189} \\ 110 \\ \underline{105} \\ 50 \\ \underline{42} \end{array}$$

①シ

$$800 + 100 + 100 = 1000$$

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

$${}_3C_1 p_2 p_1^2 = 3 \cdot \frac{1}{100} \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{3}{10000} = 0.0003$$

(3) 花子さんがくじを3回引いたところ、得点の合計は1000点であった。くじを3回引いて得点の合計が1000点となる確率は (1) である。また、くじを3回引いて得点の合計が1000点以上となる確率は0.0036より小さい。このことから、太郎さんは「くじの設定どおりに行われておらず、(1)で求めたXの確率分布と異なるのではないか」と疑問をもった。

くじ引きを n 回繰り返すとき、各回の得点を表す確率変数を $W_1, W_2, \dots, W_n$ とし、これらを母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から無作為に抽出した大きさ n の無作為標本とみなす。太郎さんは、 m に対する信頼度95%の信頼区間を求めることにした。

くじを400回引いた結果、得点の平均は16.75点、標本の標準偏差は75点であった。一般に、標本の大きさが大きいときには、 σ の代わりに、標本の標準偏差を用いてよいことが知られている。標本の大きさ400は十分に大きいので、母

平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は (2) である。 $16.75 - 1.96 \cdot \frac{75}{\sqrt{400}} \leq m \leq 16.75 + 1.96 \cdot \frac{75}{\sqrt{400}}$

以上から、母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は、(1)の $E(X)$ を含んでいることが確認できた。

$$1.96 \cdot \frac{75}{\sqrt{400}} = \frac{1.96}{100} \cdot \frac{75}{20} = \frac{73.5}{10} = 7.35$$

$$16.75 - 7.35 \leq m \leq 16.75 + 7.35$$

$$9.4 \leq m \leq 24.1$$

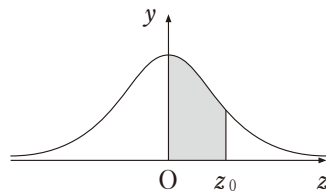
の解答群

- | | | |
|----------|----------|----------|
| ① 0.0001 | ① 0.0003 | ② 0.0005 |
| ③ 0.0010 | ④ 0.0024 | ⑤ 0.0030 |

については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| ① $6.46 \leq m \leq 27.04$ | ① $9.34 \leq m \leq 30.66$ |
| ② $9.40 \leq m \leq 24.10$ | ③ $9.71 \leq m \leq 30.29$ |
| ④ $10.60 \leq m \leq 22.90$ | ⑤ $13.85 \leq m \leq 26.15$ |

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。

[illegible]