

第4問 (選択問題) (配点 16)

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次の式で定める。

$$a_1 = -3, a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{-3} \left(\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \right)^{n-1}$ である。
ウエ
アイ
オ (2点)

n が奇数であれば $a_n \boxed{0}$ が成り立つ。また、 n が偶数であれば
 $a_n \boxed{2}$ が成り立つ。
カ
キ (2点)

$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

$\boxed{0} < \quad \quad \quad \boxed{2} >$
カ
キ

数列 $\{a_n\}$ は第1項 $a_1 = -3$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n &= \boxed{-3 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}} \\ &= -3 (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= (-1)^n \cdot 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

n が奇数であれば $(-1)^n = -1$ となる $a_n = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \boxed{< 0}$
 n が偶数であれば $(-1)^n = 1$ となる $a_n = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \boxed{> 0}$
①カ
②キ

①補

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
-3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	...

$\times \left(-\frac{1}{2} \right) \quad \times \left(-\frac{1}{2} \right)$

$\ominus \quad \oplus \quad \ominus \quad \oplus \quad \ominus \quad \oplus$

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(2) 数列 $\{b_n\}$ を次の式で定める。

$$b_1 = -3, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n - 9 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき

$$-\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}a - 9 \Leftrightarrow a = -6$$

$$b_{n+1} - a = -\frac{1}{2}(b_n - a)$$

$$b_{n+1} + \boxed{6} = -\frac{1}{2}\left(b_n + \boxed{6}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。したがって, $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{3} \left(\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \right)^{n-1} - \boxed{6}$$

である。

すべての自然数 n について $\left(\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \right)^{n-1} \leq A$ が成り立つような最小の実数

A は, $A = \boxed{1}$ である。

以上のことから, 数列 $\{b_n\}$ に関する記述として, 次の①~③のうち, 正しいものは $\boxed{①}$ である。

$\boxed{ソ}$ の解答群

- ① すべての自然数 n について $b_n < 0$ が成り立つ。
 ② すべての自然数 n について $b_n > 0$ が成り立つ。
 ③ $b_k < 0$ となる自然数 k があり, $b_\ell > 0$ となる自然数 ℓ もある。

①補 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} : 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$

$b_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 6 : -3, -\frac{15}{2}, -\frac{21}{4}, -\frac{51}{8}, -\frac{61}{16}, \dots$

変形は
 $b_{n+1} + \boxed{6} = -\frac{1}{2}(b_n + 6)$

数列 $\{b_n + 6\}$ は第1項 $b_1 + 6 = -3 + 6 = 3$
 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n + 6 = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって $b_n = \boxed{3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 6}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ は n が奇数のとき $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$
 n が偶数のとき $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0$
 n が奇数のとき $n = 1, 3, 5, \dots$ とし

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ は単調に減少するから

$n = 1$ のとき最大値 $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ とする。

自然数 n について

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1$$

であるから

求める A の値は

$$A = \boxed{1}$$

これは $b_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 6 \leq 3 \cdot 1 - 6 = -3$

よってすべての自然数 n について

$$b_n < 0$$

①✓

← $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ は単調に減少

2×3 $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq b_5 \geq \dots$

2-6

← $b_n \leq -3 < 0$

上の記述は明か

実際にかいた方がわかりやすいか

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(3) a を実数とする。数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める。

$$c_1 = a,$$

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n^2 + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{①}$$

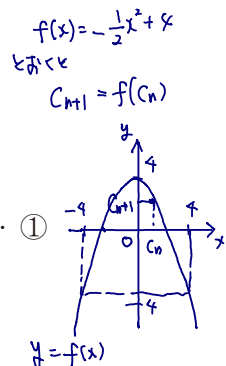
花子さんと太郎さんは、数列 $\{c_n\}$ について話している。

花子：一般項 c_n を求めてみようか。

太郎：一般項を式で表すのは難しそうだから、 a と n をいろいろ変えてみて、 c_n の具体的な値を調べてみよう。

花子：コンピュータでたくさん計算してみたけれど、 $-4 \leq c_n \leq 4$ が成り立つことが多いね。

太郎： $-4 \leq c_k \leq 4$ が成り立つと、 $-4 \leq c_{k+1} \leq 4$ も成り立つように見えるね。



(i) 太郎さんは、次の**命題1**が真であることを証明しようと考えた。

命題1 k を自然数とする。 $-4 \leq c_k \leq 4$ が成り立つならば、
 $-4 \leq c_{k+1} \leq 4$ が成り立つ。

数列 $\{c_n\}$ は①を満たすので、次が成り立つ。

• すべての自然数 k について、 $c_{k+1} \leq 4$ は、○。

• すべての自然数 k について、 $-4 \leq c_{k+1}$ は、○。

したがって、**命題1**は真である。また、**命題1**を用いると、数学的帰納法により次の**命題2**が真であることがわかる。

命題2 $-4 \leq a \leq 4$ ならば、すべての自然数 n について $-4 \leq c_n \leq 4$ が成り立つ。

(I) $-4 \leq a \leq 4$ なのて $-4 \leq c_1 \leq 4$

(II) 命題1 より $-4 \leq c_k \leq 4 \Rightarrow -4 \leq c_{k+1} \leq 4$

①から $c_{k+1} = -\frac{1}{2}c_k^2 + 4$

$c_{k+1} \leq 4$ は c_k の値によらず成り立つ (○)

$-4 \leq c_{k+1}$ は $-4 \leq c_k \leq 4$ ならば成り立つ

$c_k < -4, 4 < c_k$ ならば成り立たない (○)

4 (2点)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

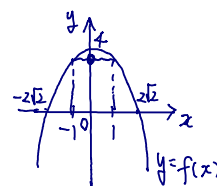
タ, チ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ✕ ① c_k の値によらず成り立つ
 ② c_k の値によらず成り立たない
 ③ $c_k \leq 4$ ならば成り立ち, $4 < c_k$ ならば成り立たない
 ④ $-4 \leq c_k$ ならば成り立ち, $c_k < -4$ ならば成り立たない
+ ⑤ $-4 \leq c_k \leq 4$ ならば成り立ち, $c_k < -4$ または $4 < c_k$ ならば成り立たない

(ii) 表 1 は, コンピュータによる計算結果の一部をまとめたものである。ただし, c_4 の値は小数第 4 位を四捨五入したものである。

表 1

	c_1	c_2	c_3	c_4
$\alpha = 1$	1	3.5	-2.125	1.742
$\alpha = 5$ (α≠4)	5	-8.5	-32.125	-512.008



← $\alpha = -1$ とも c_2 の下降は同じ
(Ⅲ) の反例
← (Ⅰ) の反例

α を変えて得られる数列 $\{c_n\}$ に関する次の命題 (I), (Ⅱ), (Ⅲ) について, 真偽の組合せとして正しいものは ⑤ である。

ツ (3点)

- (I) $\alpha > 4$ ならば, すべての自然数 n について $c_n > 4$ が成り立つ。
 (Ⅱ) $\alpha \leq 4$ ならば, すべての自然数 n について $c_n \leq 4$ が成り立つ。
 (Ⅲ) $\alpha < 0$ ならば, すべての自然数 n について $c_n < 0$ が成り立つ。

ツ の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	真	真	真	真	偽	偽	偽
(Ⅱ)	真	真	偽	偽	真	偽	偽
(Ⅲ)	真	偽	真	偽	真	真	偽

α > 4 の自然数 n で
 $c_n \leq 4$

⑤ かつ
 (Ⅰ) は偽, (Ⅱ) は真

(Ⅲ) は偽

反例は
 $\alpha = -1$ ならば
 $c_1 = -1$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= -\frac{1}{2}c_1^2 + 4 \\
 &= -\frac{1}{2}(-1)^2 + 4 \\
 &= \frac{7}{2} = 3.5 > 0
 \end{aligned}$$

⑥ $-2\sqrt{2} < \alpha < 2\sqrt{2}$
 ならば $c_2 > 0$