

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

第3問 (必答問題) (配点 22)

(1) 関数 $F(x) = \int_0^x t(t-2)dt$ について考える。

$$F'(x) = x^2 - \boxed{2}x$$

ア (2点)

である。

$x = \boxed{0}$ のとき, $F(x)$ は極大値 $\boxed{0}$ をとる。

イ

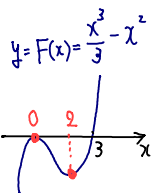
ウ (2点)

$x = \boxed{2}$ のとき, $F(x)$ は極小値 $\boxed{-4}$ をとる。

エ

オ

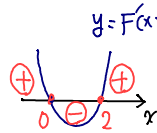
キ (2点)



$$F(x) = \int_0^x t(t-2)dt$$

$$F'(x) = x(x-2) = x^2 - \boxed{2}x$$

$$F'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 2$$



x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$x = \boxed{0} \text{ のとき 極大値 } F(0) = \int_0^0 t(t-2)dt = \boxed{0}$$

$$x = \boxed{2} \text{ のとき 極小値 } F(2) = \int_0^2 t(t-2)dt = -\frac{1}{6}(2-0)^3 = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

(2) $x \geq 0$ のとき, 関数 $G(x) = \int_0^x |t(t-2)|dt$ のグラフの概形を考えよう。

(i) $t(t-2) \leq 0$ を満たす t の値の範囲は $0 \leq t \leq 2$ であり, $t(t-2) \geq 0$ を満たす t の値の範囲は $t \leq 0, 2 \leq t$ である。よって

$0 \leq t \leq 2$ のとき

$$|t(t-2)| = \boxed{2}$$

$t \leq 0, 2 \leq t$ のとき

$$|t(t-2)| = \boxed{0}$$

である。

$0 \leq t \leq 2$ のとき

$$|t(t-2)| = \boxed{-t(t-2)}$$

$t \leq 0, 2 \leq t$ のとき

$$|t(t-2)| = \boxed{t(t-2)}$$

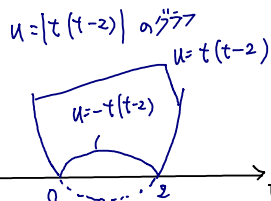
$\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

$\boxed{0} \quad t(t-2)$

$\boxed{1} \quad t(t+2)$

$\boxed{2} \quad -t(t-2)$

$\boxed{3} \quad -t(t+2)$



数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(ii) (i) により, $G(x)$ を (1) の $F(x)$ を用いて表すと

$0 \leq x \leq 2$ のとき

$$G(x) = \int_0^x \boxed{\text{②}} dt = \boxed{\text{⑨}} \quad \begin{array}{l} \text{コ} \quad \text{サ (2点)} \end{array}$$

$2 \leq x$ のとき

$$G(x) = \int_0^2 \boxed{\text{②}} dt + \int_2^x \boxed{\text{①}} dt = \boxed{\text{②}} \quad \begin{array}{l} \text{シ} \quad \text{ス (3点)} \end{array}$$

である。

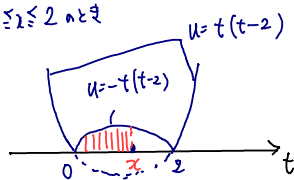
, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | |
|--|---------------------------------------|
| ☒ ① $t(t-2)$ | ☐ ① $t(t+2)$ |
| ☒ ② $\{-t(t-2)\}$ | ☐ ③ $\{-t(t+2)\}$ |

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

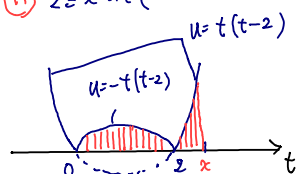
- | | | |
|---|---|---|
| ☐ ① $F(x) - \frac{8}{3}$ | ☐ ① $-F(x) - \frac{8}{3}$ | ☒ ② $F(x) + \frac{8}{3}$ |
| ☐ ③ $-F(x) + \frac{8}{3}$ | ☐ ④ $F(x) - \frac{4}{3}$ | ☐ ⑤ $-F(x) - \frac{4}{3}$ |
| ☐ ⑥ $F(x) + \frac{4}{3}$ | ☐ ⑦ $-F(x) + \frac{4}{3}$ | ☐ ⑧ $F(x)$ |
| ☒ ⑨ $-F(x)$ | | |

⑩ $0 \leq x \leq 2$ のとき



$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x |t(t-2)| dt \\ &= \int_0^x \{-t(t-2)\} dt \quad \text{②コ} \\ &= -\int_0^x t(t-2) dt \\ &= \boxed{-F(x)} \quad \text{⑨サ} \end{aligned}$$

⑪ $2 \leq x$ のとき



$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x |t(t-2)| dt \\ &= -\int_0^2 t(t-2) dt + \int_2^x t(t-2) dt \quad \text{①シ} \\ &= -F(2) + F(x) - F(2) \\ &= F(x) - 2F(2) \\ &= F(x) - 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = \boxed{F(x) + \frac{8}{3}} \quad \text{②ス} \end{aligned}$$

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

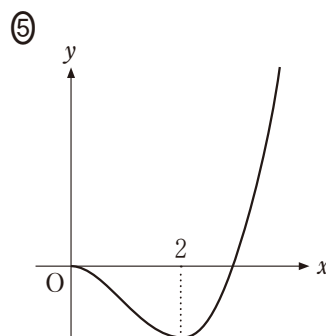
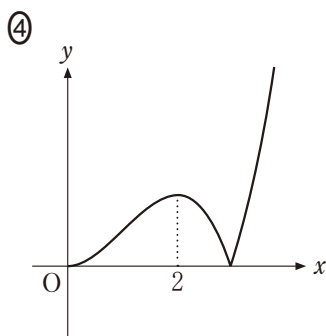
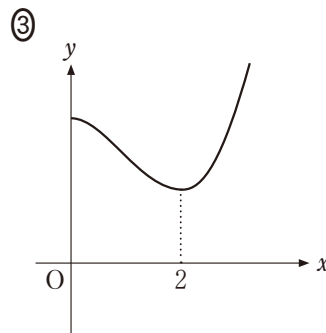
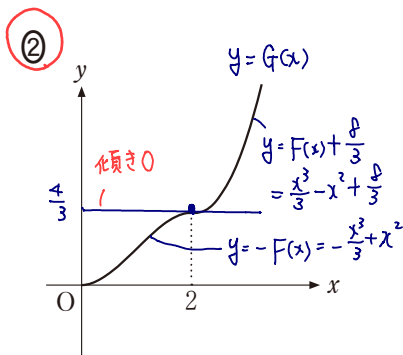
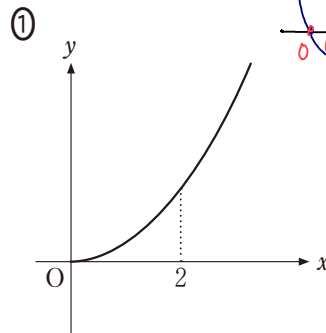
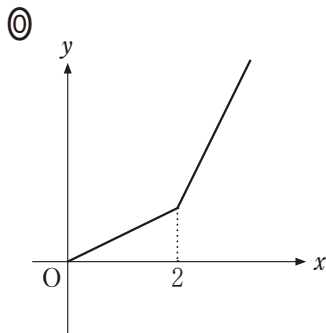
$$G(x) = \begin{cases} -F(x) & (0 \leq x \leq 2) \\ F(x) + \frac{4}{3} & (2 \leq x) \end{cases}$$

(iii) (ii) により, 関数 $y = G(x)$ のグラフの概形は ② である。
セ (3点)

$$G(0) = -F(0) = 0$$

$$G(2) = -F(2) = -\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

セ については, 最も適当なものを, 次の①~⑤のうちから一つ選べ。 $0 < x < 2$ $F'(x) < 0$



$0 < x < 2$ $F'(x) < 0$
 ①において $G'(x) = -F'(x) > 0$
 $2 < x$ において $G'(x) = F'(x) > 0$
 $y = G(x)$ は単調増加する
 ①, ②
 のグラフにしぼる
 $F(x)$ は3次関数のグラフは直線ではなく
 ①は不適当
 $y = G(x)$ のグラフは $x=2$ で連続で
 $F'(2) = 0$ より $G'(2) = 0$
 なるので
 $y = G(x)$ 上の $x=2$ における接線の傾きは0
 よろ $y = G(x)$ のグラフは

② セ

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

- (3) α, β は $\alpha < \beta$ を満たす定数とする。 $x \geq \alpha$ のとき、次の関数 $H(x)$ について考える。

$$H(x) = \int_{\alpha}^x |(t - \alpha)(t - \beta)| dt - \int_{\alpha}^x (t - \alpha)(t - \beta) dt$$

$H(x)$ の値が x の値によらず一定となるような x の値の範囲は である。 における $H(x)$ の値は に等しい。

別紙!

に解答

ソ(3点)

タ(3点)

の解答群

② $\alpha \leq x \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$

① $\frac{3\alpha + \beta}{4} \leq x \leq \frac{\alpha + 3\beta}{4}$

② $\frac{\alpha + \beta}{2} \leq x \leq \beta$

③ $\beta \leq x$

の解答群

① 0

① 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積

② 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の 2 倍

③ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の $\frac{1}{2}$ 倍

④ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の $-\frac{1}{2}$ 倍

⑤ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の -1 倍

⑥ 関数 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積の -2 倍

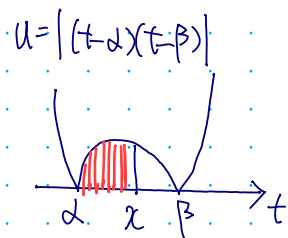
別紙1

(3) ㉔ $\alpha \leq x \leq \beta$

のとき

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\alpha}^x |(t-\alpha)(t-\beta)| dt - \int_{\alpha}^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= \int_{\alpha}^x (t-\alpha)(t-\beta) dt - \int_{\alpha}^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= -2 \int_{\alpha}^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \end{aligned}$$

これは x の値により値が変わる (一定ではない)

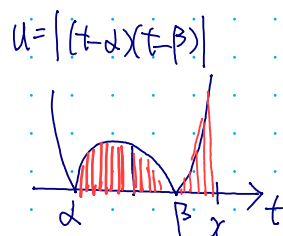


㉕ $\beta \leq x$

のとき

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\alpha}^x |(t-\alpha)(t-\beta)| dt - \int_{\alpha}^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta) dt + \int_{\beta}^x (t-\alpha)(t-\beta) dt - \int_{\alpha}^x (t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta) dt - \int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= \frac{1}{3} (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

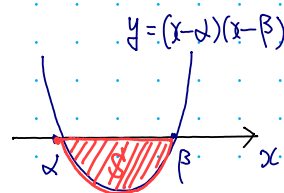
これは x の値によらず一定となる。



よって $H(x)$ の値が x の値によらず一定となるような x の値の範囲は $\boxed{\beta \leq x}$ ㉓

$y = (x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S とする

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$



㉕ のとき

$$H(x) = 2S$$

㉔