第 1 問 （必答問題）（配点　15）

n を 3 以上の自然数とする。

(1)　x^n を $x-2$ や $2x-1$ で割ったときの余りについて考えよう。

(i)　x^n を $x-2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを k とおく。x^n を $Q(x)$ と k を用いて表すと

$$x^n = \boxed{④}$$ ……①

ア（2点）

となる。① の両辺の x に 2 を代入すると，$k = \boxed{⑤}$ であることがわかる。

イ（2点）

(ii)　(i) と同様に考えると，x^n を $2x-1$ で割ったときの余りは，$\boxed{⑧}$ であることがわかる。

ウ（2点）

(i)　$x^n = \boxed{(x-2)Q(x)+k}$ ④ア …①

と表せる

① の両辺の x に 2 を代入して

$2^n = (2-2)Q(2)+k$

0

よって　$k = \boxed{2^n}$ ⑤イ

x^n を $x-2$ で割ったときの余りは 2^n とわかる

(補)　$x^n = \{(x-2)+2\}^n$　二項定理

$= {}_nC_0(x-2)^n + {}_nC_1(x-2)^{n-1}\cdot 2 + \cdots + {}_nC_{n-1}(x-2)2^{n-1} + 2^n$

$= (x-2)Q(x) + 2^n$

(ii)　x^n を $2x-1$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，余りを r とおくと

$x^n = (2x-1)Q_1(x) + r$

と表せて，$x = \frac{1}{2}$ を代入して

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = r$

x^n を $2x-1$ で割ったときの余りは $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{2^n}}$ ⑧ウ

［ア］の解答群

⓪ $kQ(x)+x-2$	① $kQ(x)-(x-2)$
② $k(x-2)+Q(x)$	③ $k(x-2)-Q(x)$
④ $(x-2)Q(x)+k$	⑤ $(x-2)Q(x)-k$

［イ］，［ウ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1
④ -2	⑤ 2^n	⑥ $(-1)^n$	⑦ -2^n
⑧ $\frac{1}{2^n}$	⑨ $-\frac{1}{2^n}$		

数学Ⅱ，数学B，数学C

⑵　次に，x^n を $(x-2)^2$ や $(2x-1)^2$ で割ったときの余りについて考えよう。

(i)　x^n を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを $R(x)$ とおく。

太郎さんと花子さんは，$R(x)$ の求め方について話している。

> 太郎：(1) と同じように考えても，余りをうまく求められないね。
>
> 花子：$X=x-2$ とおいてみるのはどうだろう。

$(X+2)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k X^{n-k}2^k$ ← 二項定理

$={}_nC_0X^n+\cdots+{}_nC_{n-2}X^2\cdot 2^{n-2}+{}_nC_{n-1}X\cdot 2^{n-1}+{}_nC_n 2^n$

$=A(x)X^2+\boxed{n\cdot 2^{n-1}}X+\boxed{2^n}$ …(*)

⓪エ　②オ

花子さんの提案する方法で，余りを求めてみよう。

$X=x-2$ とおく。このとき

$$x^n=(X+2)^n$$

である。$(X+2)^n$ を展開すると，X の項の係数は $\boxed{0}$（$n\cdot 2^{n-1}$，エ（2点）），定数項は $\boxed{2}$（2^n，オ（2点））となる。これら以外の項は X^2 で割り切れるので，$(X+2)^n$ は，ある多項式 $A(X)$ を用いて

$$(X+2)^n=A(X)\cdot X^2+\boxed{n\cdot 2^{n-1}}X+\boxed{2^n}$$

と表すことができる。このことから

$$R(x)=\boxed{4}x+\boxed{3}$$

（④：$n\cdot 2^{n-1}$，カ　③：$(-n+1)\cdot 2^n$，キ（2点））

であることがわかる。

(*) で $X=x-2$ として

$x^n=A(x-2)(x-2)^2+n\cdot 2^{n-1}(x-2)+2^n$

$=A(x-2)(x-2)^2+n\cdot 2^{n-1}x+(-n+1)2^n$

$R(x)$

よって $R(x)=\boxed{n\cdot 2^{n-1}}x+\boxed{(-n+1)\cdot 2^n}$

④カ　③キ

(ii)　(i) と同様に考えると，x^n を $(2x-1)^2$ で割ったときの余りは，$\boxed{\frac{n}{2^{n-1}}}x+\boxed{\frac{-n+1}{2^n}}$ である。

⑧ク　⑨ケ（3点）

$X=2x-1$

とおくと

$x^n=\left(\frac{X+1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}(X+1)^n$ ← 二項定理

$=\frac{1}{2^n}\left({}_nC_0X^n+\cdots+{}_nC_{n-2}X^2+{}_nC_{n-1}X+{}_nC_n\right)$

$=\frac{1}{2^n}\left\{B(X)X^2+nX+1\right\}$

$=\frac{1}{2^n}\left\{B(2x-1)(2x-1)^2+n(2x-1)+1\right\}$

$=\frac{1}{2^n}B(2x-1)(2x-1)^2+\frac{n}{2^{n-1}}x+\frac{-n+1}{2^n}$

商　余り

よって x^n を $(2x-1)^2$ で割ったときの余りは

$\boxed{\frac{n}{2^{n-1}}}x+\boxed{\frac{-n+1}{2^n}}$

⑧ク　⑨ケ

エ ～ ケ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 2^n	① $\dfrac{1}{2^n}$
② $n \cdot 2^n$	③ $(-n+1) \cdot 2^n$
④ $n \cdot 2^{n-1}$	⑤ $(-n+1) \cdot 2^{n-1}$
⑥ $\dfrac{n}{2^n}$	⑦ $\dfrac{-n+1}{2^n}$
⑧ $\dfrac{n}{2^{n-1}}$	⑨ $\dfrac{-n+1}{2^{n-1}}$