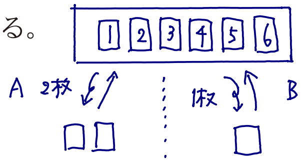
数学Ⅰ，数学A

第４問 （配点　20）

箱の中に，１から６までの自然数が一つずつ書かれた６枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる自然数が書かれている。



次の**試行A**と**試行B**を考える。

試行A

箱の中から２枚のカードを同時に取り出し，書かれている自然数を確認してからもとに戻す。

試行B

箱の中から１枚のカードを取り出し，書かれている自然数を確認してからもとに戻す。

カードを２枚取り出す方法は，**試行A**を１回行うことと，**試行B**を２回行うことの二つあり，この二つの場合について，花子さんと太郎さんは話をしている。

花子：二人が別々に，**試行A**を１回ずつ行う場合を考えてみよう。

太郎：例えば，花子さんが取り出したカードに自然数１，２が書かれていて，私が取り出したカードに自然数２，３が書かれていたら，二人が１個の共通の自然数２を取り出したことになるね。

花子：一般に，二人が取り出す共通の自然数が何個であるときが最も起こりやすいのかな。

太郎：**試行B**を２回行う場合と比べてみるとどうなるのかな。

(1) 花子さんと太郎さんが別々に，**試行A**を1回ずつ行う場合を考える。

(i) 花子さんが**試行A**を1回行う場合，2枚のカードの取り出し方は $\boxed{15}$ 通りある。

アイ (2点)

${}_6C_2 = \boxed{15}$ (通り)

アイ

(ii) 花子さんが取り出した2枚のカードに書かれた自然数だけを要素にもつ集合を E とし，太郎さんが取り出した2枚のカードに書かれた自然数だけを要素にもつ集合を F とする。

例えば，花子さんが取り出した2枚のカードに書かれた自然数が5と6であるとき，$E=\{5,6\}$ である。

以下，集合 $E\cap F$ の要素がないという事象を A_0 とし，集合 $E\cap F$ の要素の個数が1個，2個であるという事象をそれぞれ A_1，A_2 とする。

事象 A_2 が起こる確率 $P(A_2)$ は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{15}}$ である。また，事象 A_0 が起こる確率 $P(A_0)$ は $\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{5}}$ である。

ウ エオ (3点)

カ キ (3点)

$E=\{a,b\}$ とすると 太郎さんは $\boxed{a},\boxed{b}$ の2枚を取り出し $F=\{a,b\}$

A_2 は E と F の2つの要素が一致する事象なので

$$P(A_2)=\frac{1}{{}_6C_2}=\boxed{\frac{1}{15}}$$

ウ エオ

$E=\{a,b\}$ とすると，太郎さんは a,b 以外の4枚から2枚を取り出し $F=\{c,d\}$ (c,d はいずれも a,b と異なる)

A_0 は E と F の2つの要素が1つも一致しない事象なので

$$P(A_0)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

カ キ

(2)　花子さんと太郎さんが別々に，**試行B**を2回ずつ行う場合を考える。

花子さんが取り出した2枚のカードに書かれた自然数だけを要素にもつ集合を G とし，太郎さんが取り出した2枚のカードに書かれた自然数だけを要素にもつ集合を H とする。

例えば，花子さんが取り出した2枚のカードに書かれた自然数がどちらも6であるとき，$G=\{6\}$ である。

以下，集合 $G\cap H$ の要素がないという事象を B_0 とし，集合 $G\cap H$ の要素の個数が1個，2個であるという事象をそれぞれ B_1，B_2 とする。

(i)　事象 B_2 が起こる確率 $P(B_2)$ は $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{108}}$ である。 ク　ケコサ(3点)

B_2 は G と H がともに異なる2つの要素をもち かつ一致する事象なので

$$P(B_2)=\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2$$

$$=\boxed{\frac{5}{108}}$$ ク ケコサ

$G=\{a, b\}$ $(a\neq b)$ とすると 太郎さんは a, b または b, a の順で取り出し $H=\{a, b\}$

(ii)　花子さんと太郎さんは，事象 B_0 が起こる確率 $P(B_0)$ の求め方について考えている。

> 花子：事象 B_0 を，私が2回とも同じ自然数が書かれたカードを取り出す場合とそうでない場合に分けて考えたらどうかな。
>
> 太郎：その二つの事象は決して同時に起こらないね。

花子さんが2回とも同じ自然数が書かれたカードを取り出し，かつ事象 B_0 が起こる確率は $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{216}}$ である。また，確率 $P(B_0)$ は $\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{72}}$ である。 シス　セソタ(3点)　チツ　テト(3点)

あ　花子さんが2回とも同じ数字のカードを取り出し，かつ B_0 が起こる確率は

$$\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\boxed{\frac{25}{216}}$$ シス セソタ

$G=\{a\}$ とすると 太郎さんは2回とも a 以外を取り出し $H=\{c\}$ または $H=\{c, d\}$ (c, d はいずれも a と異なる)

い　花子さんが2回で異なる数字のカードを取り出し，かつ B_0 が起こる確率は

$$\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\times\left(1-\frac{2}{6}\right)\left(1-\frac{2}{6}\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{80}{216}$$

$G=\{a, b\}$ $(a\neq b)$ とすると 太郎さんは2回とも a, b 以外を取り出し $H=\{c\}$ または $H=\{c, d\}$ (c, d はいずれも a, b と異なる)

あ または い より

$$P(B_0)=\frac{25}{216}+\frac{80}{216}=\frac{105}{216}=\boxed{\frac{35}{72}}$$ チツ テト

(3) (1)で定めた事象 A_0，A_1，A_2 が起こる確率 $P(A_0)$，$P(A_1)$，$P(A_2)$ のうち，最大のものは $\boxed{①}$ である。
ナ

また，(2)で定めた事象 B_0，B_1，B_2 が起こる確率 $P(B_0)$，$P(B_1)$，$P(B_2)$ のうち，最大のものは $\boxed{⓪}$ である。
ニ (3点)

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $P(A_0)$	① $P(A_1)$	② $P(A_2)$

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $P(B_0)$	① $P(B_1)$	② $P(B_2)$

$P(A_2) = \frac{1}{15}$

$P(A_0) = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

$P(A_2) + P(A_1) + P(A_0) = 1$

より $P(A_1) = 1 - (P(A_2) - P(A_0))$

$= 1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{6}{15}\right)$

$= \frac{8}{15}$

よって $P(A_2) < P(A_0) < P(A_1)$

最大のものは $\boxed{P(A_1)}$

① ナ

$P(B_2) = \frac{5}{108} = \frac{10}{216}$

$P(B_0) = \frac{35}{72} = \frac{105}{216}$

$P(B_2) + P(B_1) + P(B_0) = 1$

より $P(B_1) = 1 - (P(B_2) + P(B_0))$

$= 1 - \left(\frac{10}{216} + \frac{105}{216}\right)$

$= \frac{101}{216}$

よって $P(B_2) < P(B_1) < P(B_0)$

最大のものは $\boxed{P(B_0)}$

⓪ ニ