数学Ⅰ，数学A

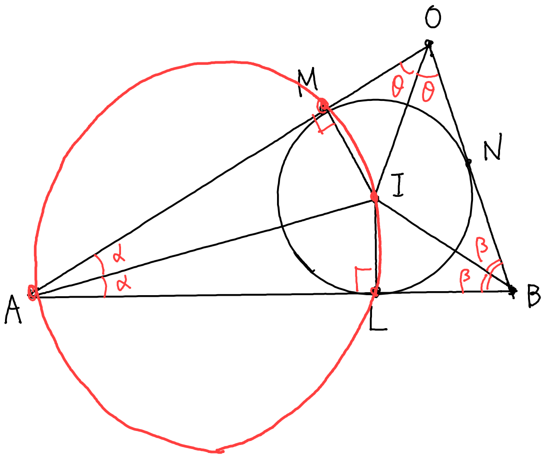
第３問 （配点　20）

△OAB の内心を I とし，△OAB の内接円と辺 AB との接点を L とする。また，△OAB の内接円と辺 OA，OB との接点を，それぞれ M，N とする。さらに，∠AOB ＝ 2 θ，∠OAB ＝ 2 α，∠OBA ＝ 2 β とおく。

(1)　点 I が △OAB の内心であることから，４点 A，I，L，M $\boxed{\text{ア}}$ ① は同一円周上にあることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

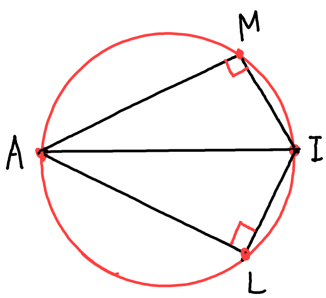
⓪　B	①　M	②　N	③　O



∠ALI＝∠AMI＝90°

なので

4点 A，I，L，$\boxed{M}$ は直径AIの同一円周上にある．

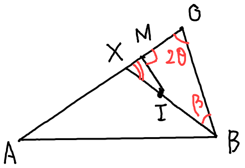


△OABの内角より

$2\theta+2\alpha+2\beta=180^\circ$　$2\times\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta+\alpha+\beta=90^\circ$

(2) 辺 OA と直線 BI との交点を X とする。このとき，辺 OA 上における 2 点 M，X の位置関係について考えよう。そのために，∠OMI と ∠OXI の大小関係を調べる。まず



$\angle OMI = \boxed{90}°$ イウ

$\angle OMI = \boxed{90°}$ イウ

$\angle OXI = 180° - (2\theta + \beta)$
$= 180° - 2\theta - \beta$
$= 180° - 2\theta - (90° - \theta - \alpha)$
$= 90° + \boxed{\alpha} - \boxed{\theta}$ エ オ

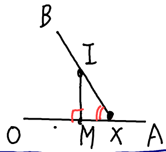
$\beta = 90° - \theta - \alpha$ を代入して β を消す

である。また，△OBX に着目し，$\theta + \alpha + \beta = 90°$ であることに注意して，∠OXI を β を用いずに表すと

$$\angle OXI = \boxed{90}° + \boxed{①} - \boxed{⓪}$$

α エ　θ オ　(3点)

あ $\alpha < \theta$ のとき
$\alpha - \theta < 0$
なので $\angle OXI < 90°$
点 X は 点 M と異なり線分 AM 上にある ②カ

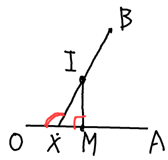


となる。

このことから，$\boxed{\alpha} < \boxed{\theta}$ のとき点 X は $\boxed{②}$ ことがわかり，$\boxed{\alpha} > \boxed{\theta}$ のとき点 X は $\boxed{①}$ ことがわかる。

カ　キ

い $\alpha > \theta$ のとき
$\alpha - \theta > 0$
なので $\angle OXI > 90°$
点 X は 点 M と異なり線分 OM 上にある ①カ



$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

オ ⓪ θ	エ ① α	② 2θ	③ 2α

$\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 点 M と一致する
キ ① 点 M と異なり，線分 OM 上にある
カ ② 点 M と異なり，線分 AM 上にある

数学Ⅰ，数学A

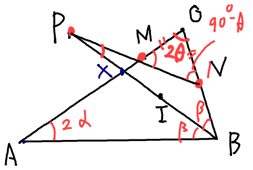
あ $\alpha < \theta$ とすると

$\angle ONM = \angle OMN$

より $\angle ONM = \dfrac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta$

よって $\angle ONP = \boxed{90^\circ - \theta}$ ③ク

$\angle OBP = \boxed{\beta}$ ②ケ



△NBP に着目して

$\beta + \angle MPI = 90^\circ - \theta$

$\therefore \angle MPI = 90^\circ - \theta - \beta$

$= \boxed{\alpha}$ コ

$\angle MAI = \alpha$

なので

$\angle MPI = \angle MAI$ $(=\alpha)$

であるから

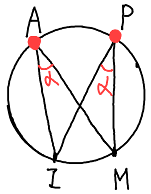
4点 I, M, P, $\boxed{A}$ ⓪サ

は同一円周上にある。

(3)　直線 MN と BI との交点を P とする。

- $\boxed{\alpha} < \boxed{\theta}$ とする。このとき直線 MN 上での 3 点 P，M，N の位置関係に注意すると，$\angle ONP = \boxed{③}$（$90^\circ-\theta$，ク），$\angle OBP = \boxed{②}$（β，ケ（3点））となるので $\angle MPI = \boxed{①}$（α，コ）となる。したがって，4 点 I，M，P，$\boxed{⓪}$（A，サ（3点））は同一円周上にある。

- $\boxed{\alpha} > \boxed{\theta}$ とする。このとき $\angle MPI = \boxed{⑦}$（シ）となる。したがって，4 点 I，M，P，$\boxed{A}$ は $\boxed{⓪}$（ス（3点））。



ク ～ コ，シ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ θ	コ ① α	ケ ② β
ク ③ $90^\circ - \theta$	④ $90^\circ - \alpha$	⑤ $90^\circ - \beta$
⑥ $180^\circ - \theta$	シ ⑦ $180^\circ - \alpha$	⑧ $180^\circ - \beta$

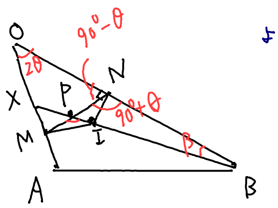
サ の解答群

⓪ A	① B	② N	③ O

ス の解答群

⓪ 同一円周上にある	① 同一円周上にはない

い $\alpha > \theta$ とすると



$\angle ONP = 90^\circ - \theta$

より $\angle BNP = 90^\circ + \theta$

$\angle NBP = \beta$

△NBP に着目して

$\angle MPI = 90^\circ + \theta + \beta$

$= 90^\circ + \theta + (90^\circ - \theta - \alpha)$

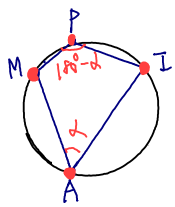
$= \boxed{180^\circ - \alpha}$ ⑦シ

$\angle MAI = \alpha$

$\angle MPI + \angle MAI = 180^\circ$

であるから

4点 I, M, P, A は $\boxed{\text{同一円周上にある}}$ ⓪ス



(4) 直線 MN と BI，AI との交点を，それぞれ P，Q とする。

M, P, N, Q

$\theta = 32°$，$\alpha = 34°$ のとき，4 点 M，N，P，Q は直線 MN 上に $\boxed{⓪}$ の順に並ぶ。

セ (3点)

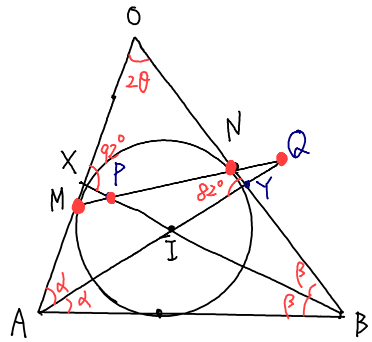
$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ M，P，N，Q	① M，P，Q，N
② P，M，N，Q	③ P，M，Q，N

$\theta = 32°$, $\alpha = 34°$

のとき

$\angle OXI = 90° + \alpha - \theta = 90° + 34° - 32° = 92° > 90°$



$\theta + \alpha + \beta = 90°$

から

$32° + 34° + \beta = 90°$

$\therefore \ \beta = 24°$

辺OBと直線AIの交点をYとすると

$\angle OYI = 90° + \beta - \theta$ ← $\angle OXI = 90° + \alpha - \theta$ の α が β になっただけ

$= 90° + 24° - 32°$

$= 82° < 90°$

よって 直線MN上で $\boxed{\text{M, P, N, Q}}$ の順に並ぶ

⓪ セ