数学Ⅰ，数学A

第２問 （配点　30）

〔1〕　花子さんと太郎さんは，コンピュータを使って，関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを表示させている。

(15点)

(1)　花子さんが a，b，c の値を $a = 2$，$b = -7$，$c = 7$ と定めると，グラフとして放物線が表示された。この放物線の頂点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \right) = \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}, \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}} \right)$$

(3点)

である。

$y = 2x^2 - 7x + 7$

$= 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) + 7$

$= 2\left\{\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right\} + 7$

$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} + \frac{56}{8}$

$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$

頂点 $\boxed{\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{8}\right)}$ //

ア イ　ウ エ

⑵　花子さんと太郎さんは，$a = 2$，$b = -7$，$c = 7$ と定めたとき，関数 $y = 2x^2 - 7x + 7$ のグラフが，点 P$(1,\ 2)$ と点 Q$(3,\ 4)$ を通ることに気づいて，コンピュータの画面を見ながら，次のように話している。

花子：このグラフは 2 点 P$(1,\ 2)$，Q$(3,\ 4)$ を通っているね。
太郎：a の値を変えるとグラフはどうなるのかな。
花子：a の値だけを変えたら，P，Q を通らなくなったよ。P，Q を通るようにするには，a の値に応じて b と c の値をどう変えたらよいのかな。

0 でない実数 a に対して

$$b = \boxed{\ 1\ }_{\text{オ}} - \boxed{\ 4\ }_{\text{カ}}\,a$$

$$c = \boxed{\ 1\ }_{\text{キ}} + \boxed{\ 3\ }_{\text{ク}}\,a$$

(3点)

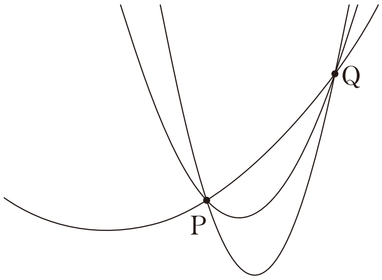
とすれば，関数

$$y = ax^2 + \left(\boxed{\ 1\ } - \boxed{\ 4\ }a\right)x + \boxed{\ 1\ } + \boxed{\ 3\ }a \quad \cdots ①$$

のグラフは 2 点 P と Q を通る。

$y = ax^2 + bx + c$
が P(1,2), Q(3,4) を通るとして
$2 = a + b + c$ …㋐
$4 = 9a + 3b + c$ …㋑
㋑−㋐ として
$2 = 8a + 2b$
$\therefore \boxed{b = 1 - 4a}$ オカ
㋐へ代入して
$2 = a + 1 - 4a + c$
$\therefore \boxed{c = 1 + 3a}$ キク

(3) 太郎さんと花子さんは，a の値を0より大きい範囲で変えながら，関数 ① のグラフを表示させて，頂点の y 座標について考えている。



参考図

太郎：a の値を0より大きい範囲で変えながら，関数 ① のグラフの頂点を考えてみようよ。

花子：グラフの頂点の y 座標が最大になるような関数はどのようなものなのかな。

太郎：グラフの頂点の座標を a の式で表して考えるのは，私たちには難しそうだね。別のやり方はないかな。

花子：グラフを表示してみたら，2点 P(1，2)，Q(3，4) とグラフの頂点との関係がわかるね。

太郎：どの a に対しても，関数 ① のグラフは必ず P と Q を通るね。

花子：しかも a が正の実数だから，関数 ① のグラフは下に凸で，頂点はグラフの一番下になるね。

太郎：そう考えると，頂点の y 座標が最大になるようなグラフが予想できるね。

グラフの頂点の y 座標の最大値は $\boxed{2}$ ケ (3点) であり，頂点の y 座標が最大になる a の値は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ コ サ (2点) である。

a>0で
①の頂点がP(1,2)になるとき
頂点のy座標 の最大値 $\boxed{2}$ ケ

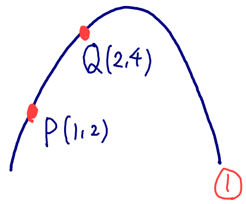
頂点のy座標が2より大きいとグラフは下に凸なのでP(1,2)を通らない

そのとき①は $y=ax^2+(1-4a)x+1+3a=a(x-1)^2+2$ ←頂点(1,2)
$=ax^2-2ax+a+2$ x^2の係数はa

$\begin{cases} 1-4a=-2a \\ 1+3a=a+2 \end{cases}$ $\therefore a=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ コ サ

(4) 次に，花子さんと太郎さんは，a の値を 0 より小さい範囲で変えながら，関数 ① のグラフを表示させている。このとき，次の (A)，(B)，(C) のうちで，起こり得るものは [シ ②]。

シ（4点）



(A) 関数のグラフが点 (0 , 3) を通る。

(B) 関数のグラフと x 軸の負の部分が交わる。

(C) 関数のグラフの頂点の x 座標が 2 以下である。

[シ] の解答群

⓪ ない
① (A) だけである
② (B) だけである
③ (C) だけである
④ (A) と (B) だけである
⑤ (A) と (C) だけである
⑥ (B) と (C) だけである
⑦ (A) と (B) と (C) のすべてである

$a<0$ のとき ① のグラフは上に凸

$f(x) = ax^2 + (1-4a)x + 1 + 3a$

とおくと ① は $y = f(x)$

(A) について

$f(0) = 3$

とすると

$1 + 3a = 3$

$\therefore a = \frac{2}{3}$

$a<0$ なので (A) は起こらない

補 グラフを考えても明らか

(B) について

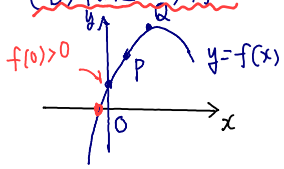
$f(0) = 1 + 3a > 0$

とすると

$a > -\frac{1}{3}$

$a<0$ となる a があるので

(B) は起こり得る



(C) について

$f(x) = a\left(x - \frac{4a-1}{2a}\right)^2 - \frac{(4a-1)^2}{4a} + 1 + 3a$

頂点の x 座標は $\frac{4a-1}{2a}$

これが 2 以下とすると

$\frac{4a-1}{2a} \leqq 2$

両辺に $2a\ (<0)$ をかけて

$4a - 1 \geqq 4a$

$-1 \geqq 0$

これは成り立たないので (C) は起こらない

よって起こり得るのは $\boxed{\text{(B)だけ}}$ ② シ