

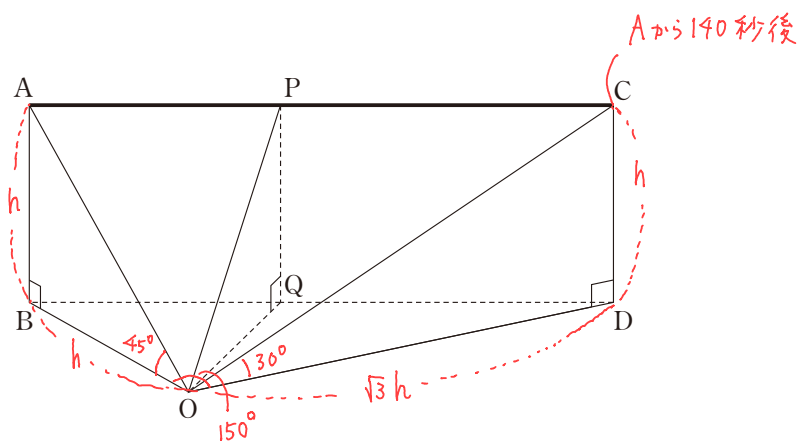
数学 I， 数学 A

〔2〕 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 12 ページの三角比の表
(20点) と， 13 ページの平方根の表を用いてもよい。

水平な地面の上空を飛行機 P が飛んでおり， 太郎さんはその地面上の点 O から飛行機 P を見ている。以下では，目の高さや飛行機 P の大きさは無視して考える。飛行機 P から地面に下ろした垂線と地面との交点を Q とするとき， $\angle POQ$ を飛行機 P を見上げる角といい，線分 PQ の長さを飛行機 P の高さという。飛行機 P は，高さと速さを一定に保ちながらまっすぐに飛んでいるものとする。

ある時刻に，飛行機 P を見上げる角が 45° であったとし，そのときの飛行機 P の位置を A，点 A から地面に下ろした垂線と地面との交点を B とする。また，その 140 秒後に，飛行機 P を見上げる角が 30° であったとし，そのときの飛行機 P の位置を C，点 C から地面に下ろした垂線と地面との交点を D とする。さらに， $\angle BOD = 150^\circ$ であったとする。

飛行機 P が点 A から点 C まで線分 AC 上を飛ぶ間における，飛行機 P を見上げる角 $\angle POQ$ の大きさについて考察しよう。



$$AB = PQ = CD = h$$
$$\tan \angle POQ = \frac{PQ}{OQ} = \frac{h}{OQ} \quad \text{--- (1)}$$

$$\tan \angle POQ = \frac{h}{OQ} = \boxed{\frac{7}{8}} \quad (2 \text{ 点})$$

 $\angle AOB = 45^\circ$ & $OB = h$

$$\angle COD = 30^\circ \text{ & } OD = \boxed{\sqrt{3}h}$$

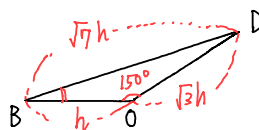
$\angle BOD = 150^\circ$ より $\triangle OBD$ に余弦定理を用いる

$$BD^2 = h^2 + (\sqrt{3}h)^2 - 2h \cdot \sqrt{3}h \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{OB} &= h, & \text{OD} &= \sqrt{\boxed{3}} h, & \text{BD} &= \sqrt{\boxed{7}} h = \sqrt{h^2 + 3h^2 + 3h^2} \\ & & & \text{サ} & & \text{サ (3点)} & = 7h^2 \\ & & & & & & \therefore \text{BD} = \boxed{\sqrt{7}h} \end{aligned}$$

$$\cos \angle OBD = \frac{\sqrt{5^2 + 7^2}}{14}$$

ツテ (3点)



$\triangle OBD$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\cos \angle OBD &= \frac{h^2 + (\sqrt{7}h)^2 - (\sqrt{3}h)^2}{2 \cdot h \cdot \sqrt{7}h} = \frac{5h^2}{2\sqrt{7}h^2} \\ &= \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{\boxed{\frac{5\sqrt{7}}{14}}}{\text{タテ}}\end{aligned}$$

ス の解答群

④ $\frac{OP}{h}$ ⑤ $\frac{OQ}{h}$ ⑥ $\frac{h}{OP}$ ⑦ $\frac{h}{OQ}$

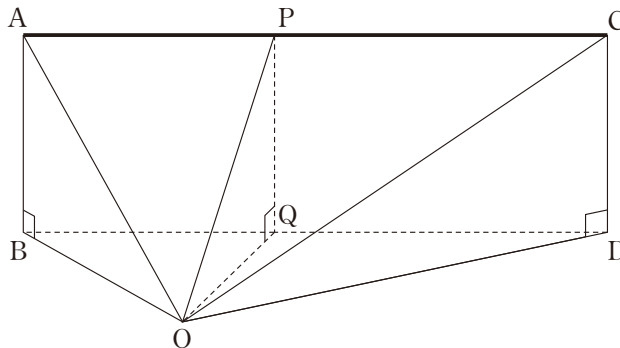
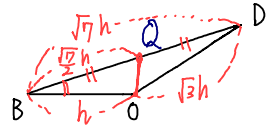
(ii) 飛行機 P が点 A を通過してから 70 秒後の位置にあるとき

$$OQ = \frac{h}{\boxed{2}}$$

ト (3点)

70 秒後について
 点 P は線分 AC の中点
 点 Q は線分 BD の中点
 求めることから
 $BQ = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{7}}{2}h$

である。また、このときの $\angle POQ$ の大きさは $\boxed{4}$ である。
 ナ (3点)



参考図 (再掲)

$\triangle OBQ$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} OQ^2 &= h^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}h\right)^2 - 2h \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}h \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} \\ &= h^2 + \frac{7}{4}h^2 - \frac{5}{2}h^2 \\ &= \frac{4+7-10}{4}h^2 \\ &= \frac{1}{4}h^2 \\ \therefore OQ &= \boxed{\frac{h}{2}} \text{ト} \end{aligned}$$

①から $\tan \angle POQ = \frac{h}{\frac{h}{2}} = 2$

$\boxed{ナ}$ の解答群

表から $\tan 63^\circ = 1.9629, \tan 64^\circ = 2.0503$

- ④ 40° 以上 45° 未満
- ② 50° 以上 55° 未満
- ④ 60° 以上 65° 未満
- ⑥ 70° 以上 75° 未満
- ⑧ 80° 以上 85° 未満

- ① 45° 以上 50° 未満
- ③ 55° 以上 60° 未満
- ⑤ 65° 以上 70° 未満
- ⑦ 75° 以上 80° 未満
- ⑨ 85° 以上 90° 未満

なぜ
 $63^\circ < \angle POQ < 64^\circ$
 よって $\angle POQ$ は
 60° 以上 65° 未満
 ④ナ

数学 I, 数学 A

(2) 太郎さんは、飛行機 P が点 A を通過してから何秒後に $\angle POQ$ の大きさが最大になるかを、 $\angle POQ$ の大きさと線分 OQ の長さの関係に着目して考えている。

$\angle POQ$ の大きさが最大になるのは、点 Q が ② のときであり、飛行機 P が点 A を通過してから 50 秒後である。また、このときの $\angle POQ$ の大きさは ⑥ である。

ノ (3点)

ヲネ (3点)

① から $\tan \angle POQ = \frac{h}{OQ}$ ← 分子は正の定数
← 分母が小さいと大きくなる

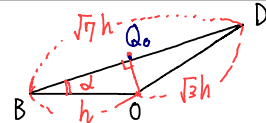
$\angle POQ$ の大きさが最大になるのは
 $\tan \angle POQ$ が最大になるとき
OQ が最小になる場合である

二 の解答群

- ③ 線分 BD の中点
- ① $\angle BOD$ の二等分線と線分 BD との交点
- ② 点 O から線分 BD に下ろした垂線と線分 BD との交点

すなわち、点 Q が
点 O から線分 BD
に下ろした垂線と
線分 BD との交点
のときである ②

ノ の解答群

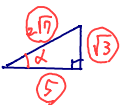


このときの Q を Q_0 とする。

$\angle OBD = \alpha$

とすると
 $\cos \alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

$BQ_0 = OB \cos \alpha$
 $= \frac{5\sqrt{7}}{14}h$



- | | |
|-----------------|-----------------|
| ③ 40° 以上 45° 未満 | ① 45° 以上 50° 未満 |
| ② 50° 以上 55° 未満 | ③ 55° 以上 60° 未満 |
| ④ 60° 以上 65° 未満 | ⑤ 65° 以上 70° 未満 |
| ⑥ 70° 以上 75° 未満 | ⑦ 75° 以上 80° 未満 |
| ⑧ 80° 以上 85° 未満 | ⑨ 85° 以上 90° 未満 |

$\frac{BQ_0}{BD} = \frac{\frac{5\sqrt{7}}{14}h}{\sqrt{7}h} = \frac{5}{14}$ なのだから A を通過してから $140 \times \frac{5}{14} = \boxed{50}$ 秒後

ヲネ

このとき

$OQ_0 = OB \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}h$

① から $\tan \angle POQ_0 = \frac{h}{OQ_0} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

表から $\sqrt{21} = 4.5826$ なのだから

$\tan \angle POQ_0 = \frac{2}{3} \times 4.5826 = 3.05506$

表から $\tan 71^\circ = 2.9042$, $\tan 72^\circ = 3.0777$

$71^\circ < \angle POQ_0 < 72^\circ$

よって $\angle POQ_0$ の大きさは 70° 以上 75° 未満 ⑥

⑥ 補 $\sqrt{21} \div 4.6$ とし

$\tan \angle POQ_0 \div \frac{2}{3} \times 4.6$
 $= 3.066 \dots$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
 $= 1 - \frac{25}{28}$
 $= \frac{3}{28}$
 $\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

三角比の表

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)	角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	—

平方根の表

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1.0000	26	5.0990
2	1.4142	27	5.1962
3	1.7321	28	5.2915
4	2.0000	29	5.3852
5	2.2361	30	5.4772
6	2.4495	31	5.5678
7	2.6458	32	5.6569
8	2.8284	33	5.7446
9	3.0000	34	5.8310
10	3.1623	35	5.9161
11	3.3166	36	6.0000
12	3.4641	37	6.0828
13	3.6056	38	6.1644
14	3.7417	39	6.2450
15	3.8730	40	6.3246
16	4.0000	41	6.4031
17	4.1231	42	6.4807
18	4.2426	43	6.5574
19	4.3589	44	6.6332
20	4.4721	45	6.7082
21	4.5826	46	6.7823
22	4.6904	47	6.8557
23	4.7958	48	6.9282
24	4.8990	49	7.0000
25	5.0000	50	7.0711