数学 I

〔2〕 データの値が a_1, a_2 であるものをデータ A, データの値が b_1, b_2 であるものをデータ B とし，これらを合わせた四つのデータの値

(5点)

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$$

をそれぞれ

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$$

とおき，これをデータ Z と呼ぶことにする。データ A, B, Z の分散をそれぞれ ${s_A}^2$, ${s_B}^2$, ${s_Z}^2$ とするとき，それらの関係について考えよう。

$\bar{a} = \frac{a_1+a_2}{2}$, $\bar{b} = \frac{b_1+b_2}{2}$

データ A, B, Z の平均値をそれぞれ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{z}$ とし，$k = \bar{a} - \bar{z}$ とおく。以下では，$k \neq 0$ の場合を考える。このとき，P, Q を

$$P = (z_1 - \bar{z})^2 + (z_2 - \bar{z})^2$$
$$Q = (z_3 - \bar{z})^2 + (z_4 - \bar{z})^2$$

とおくと

$$P = (z_1 - \bar{z})^2 + (z_2 - \bar{z})^2$$
$$= (a_1 - \bar{z})^2 + (a_2 - \bar{z})^2$$
$$= \{(a_1 - \bar{a}) + k\}^2 + \{(a_2 - \bar{a}) + k\}^2$$

であり

$${s_A}^2 = \frac{P - \boxed{2}\,k^2}{2}$$ ケ(2点)

となることがわかる。同様にして

$${s_B}^2 = \frac{Q - \boxed{2}\,k^2}{2}$$

となることもわかる。

${s_A}^2 = \frac{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2}{2}$

${s_B}^2 = \frac{(b_1-\bar{b})^2+(b_2-\bar{b})^2}{2}$

${s_Z}^2 = \frac{(z_1-\bar{z})^2+(z_2-\bar{z})^2+(z_3-\bar{z})^2+(z_4-\bar{z})^2}{4}$

$P = (z_1-\bar{z})^2+(z_2-\bar{z})^2$
$= (a_1-\bar{z})^2+(a_2-\bar{z})^2$
$= (a_1-\bar{a}+k)^2+(a_2-\bar{a}+k)^2$ $(\because -\bar{z} = -\bar{a}+k)$
$= \{(a_1-\bar{a})+k\}^2+\{(a_2-\bar{a})+k\}^2$
$= (a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+2k\{(a_1-\bar{a})+(a_2-\bar{a})\}+2k^2$

ここで $(a_1-\bar{a})+(a_2-\bar{a}) = a_1+a_2-2\bar{a}$
$= a_1+a_2-2\cdot\frac{a_1+a_2}{2}$
$= a_1+a_2-(a_1+a_2)$
$= 0$

$P = (a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+2k^2$

であるから $\boxed{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2} = P-2k^2$

よって

${s_A}^2 = \frac{\boxed{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2}}{2}$

$= \frac{P-\boxed{2}_{ケ}k^2}{2}$ …①

同様に ${s_B}^2 = \frac{Q-2k^2}{2}$ …②

a_1, a_2 が b_1, b_2 になるだけ

これらのことと $k \fallingdotseq 0$ に着目すると，$s_A{}^2$，$s_B{}^2$，$s_Z{}^2$ の関係として，次の⓪〜③のうち，正しいものは $\boxed{\text{②}}$ であることがわかる。

コ (3点)

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ k の値によらず，つねに $s_Z{}^2 = \frac{1}{2}s_A{}^2 + \frac{1}{2}s_B{}^2$ が成り立つ。

① k の値によらず，つねに $s_Z{}^2 < \frac{1}{2}s_A{}^2 + \frac{1}{2}s_B{}^2$ が成り立つ。

② k の値によらず，つねに $s_Z{}^2 > \frac{1}{2}s_A{}^2 + \frac{1}{2}s_B{}^2$ が成り立つ。

③ $s_Z{}^2$ と $\frac{1}{2}s_A{}^2 + \frac{1}{2}s_B{}^2$ の大小関係は，k の値によって変わる。

$$S_Z{}^2 = \frac{(z_1-\bar{z})^2+(z_2-\bar{z})^2+(z_3-\bar{z})^2+(z_4-\bar{z})^2}{4}$$

$$= \frac{P + Q}{4}$$

$$= \frac{2S_A{}^2+2k^2+2S_B{}^2+2k^2}{4}$$

$\left(\because\ ①, ②\text{より}\ P = 2S_A{}^2+2k^2,\ Q = 2S_B{}^2+2k^2\right)$

$$= \frac{1}{2}S_A{}^2 + \frac{1}{2}S_B{}^2 + k^2$$

$k \fallingdotseq 0$ となる実数 k の値はつねに $k^2 > 0$ をみたすので

$$S_Z{}^2 > \frac{1}{2}S_A{}^2 + \frac{1}{2}S_B{}^2$$

が成り立つ

$\boxed{②}$ コ