

数学 I

第 3 問 (配点 30)

[1] $f(x) = x^2 - 4x$ とする。

(15点)

(1)

(i) 2 次不等式 $f(x) \leq -1$ の解は

$$\boxed{2} - \sqrt{\boxed{3}} \leq x \leq \boxed{2} + \sqrt{\boxed{3}}$$

ア イ (2点)

である。

(ii) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフの軸は直線 $x = \boxed{2}$ である。また,

$y = f(x)$ の最小値は $\boxed{-4}$ である。

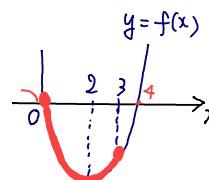
エオ (2点)

(iii) $0 \leq x \leq 3$ における $y = f(x)$ の最大値は $\boxed{0}$ である。

カ (2点)

$0 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最大値は $f(0) = \boxed{0}$ カ

最大



$$f(x) \leq -1$$

つまり

$$x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

と解くと

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

よって

$$\boxed{2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}}$$

ア イ

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$= (x-2)^2 - 4$$

$y = f(x)$ のグラフの軸は $x = \boxed{2}$ である。

$f(x)$ の最小値は $\boxed{-4}$ ($x=2$)

エオ

数学 I

(2) s を正の定数とする。(1)の -4 が, $0 \leq x \leq s$ における $y = f(x)$ の

最小値となるための必要十分条件は $s \geq 2$ である。

$0 < s < 2$ のとき, $0 \leq x \leq s$ における $y = f(x)$ の最小値は $s^2 - 4s$ である。

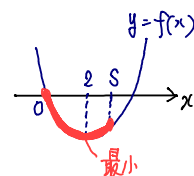
ク の解答群

- | | | | |
|-------------|-------------|------------|------------|
| ④ $-s-2$ | ① $-s+2$ | ② $s-2$ | ③ $s+2$ |
| ④ $-s^2-4s$ | ⑤ $-s^2+4s$ | ⑥ s^2-4s | ⑦ s^2+4s |

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

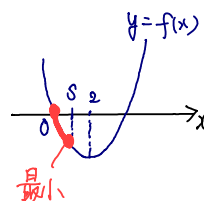
$f(2) = -4$ が $0 \leq x \leq s$ ($s > 0$) における $y = f(x)$ の最小値となるための必要十分条件は $y = f(x)$ のグラフの軸: $x=2$ が定義域内に入ることから

$$s \geq 2$$



$0 < s < 2$ のとき $0 \leq x \leq s$ (< 2) における $y = f(x)$ の最小値は

$$f(s) = s^2 - 4s$$



数学 I

- (3) k を正の定数とし

$$g(x) = x^2 - 4kx$$

$$g(x) = x^2 - 4kx = (x - 2k)^2 - 4k^2$$

$y = g(x)$ のグラフの軸: $x = 2k$

$y = g(x)$ のグラフの頂点 $(\underbrace{2k}_p, \underbrace{-4k^2}_q)$

とする。2 次関数 $y = g(x)$ のグラフの頂点の座標を (p, q) とする。

s を正の定数とする。太郎さんと花子さんは、 $0 \leq x \leq s$ における $y = g(x)$ の最小値について考えている。

太郎: $f(x)$ と違って、 $g(x)$ は k を含む式になっているね。

花子: そうだね。 $y = g(x)$ のグラフの軸の位置に注目して最小値を考えてみよう。

- (i) $0 \leq x \leq s$ における $y = g(x)$ の最小値が q であるための必要十分条件

として、次の ①~⑧ のうち、正しいものは ③ である。

ケ (3 点)

$y = g(x)$ のグラフの軸: $x = 2k$
が定義域内に入ることから

$$s \geq 2k$$

ケ の解答群

① $s \geq k$

② $s = k$

③ $s \leq k$

④ $s \geq 2k$

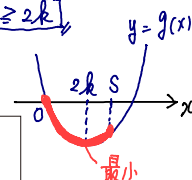
⑤ $s = 2k$

⑥ $s \leq 2k$

⑦ $s \geq 4k$

⑧ $s = 4k$

⑨ $s \leq 4k$



数学 I

- (ii) $0 \leq x \leq s$ における $y = g(x)$ の最小値に関して、次の命題 (a), (b) の真偽の組合せとして正しいものは ② である。

コ (2点)

- (a) $k > 1$ かつ $s = k + 1$ ならば、最小値は q である。
 (b) $k > 1$ かつ $s = 3k - 1$ ならば、最小値は q である。

↑ (i) をみたすの証明

コ の解答群

	①	②	③
(a)	真	偽	偽
(b)	真	真	偽

(a) $k > 1$ かつ $s = k + 1$ ならば

$s \geq 2k$ ← (i) の $f(x)$ ($0 \leq x \leq s$) の最小値が q となる必要十分条件

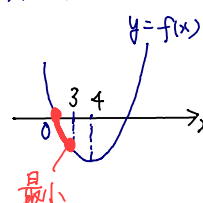
$$\Leftrightarrow k+1 \geq 2k$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq k$$

$k > 1$ なのぞ (i) をみたさない

よって (a) は 偽

反例は $k=2$ かつ $s=3$



(b) $k > 1$ かつ $s = 3k - 1$ ならば

$$s \geq 2k$$

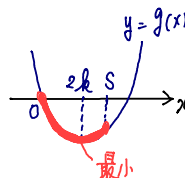
$$\Leftrightarrow 3k-1 \geq 2k$$

$$\Leftrightarrow k \geq 1$$

$k > 1$ なのぞ (i) を常にみたす

ゆえに $f(x)$ ($0 \leq x \leq s$) の最小値は q

よって (b) は 真



正しいものは ② コ