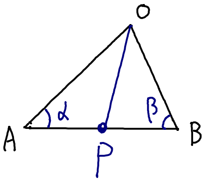
数学Ⅰ

第２問 （配点　30）

〔1〕 △OAB の辺 AB 上に，点 A，B と異なる点 P をとる。△OAP，△OPB，

(10点) △OAB の外接円の半径を，それぞれ R_1，R_2，R_3 とする。



(1) $\dfrac{R_1}{R_3}$ と $\dfrac{R_2}{R_1}$ を，線分の長さの比を用いて表そう。

$$R_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{2\sin\angle \mathrm{OAB}}$$

OP ② ア

$$R_3 = \frac{\boxed{\text{イ}}}{2\sin\angle \mathrm{OAB}}$$

OB ① イ (3点)

である。したがって

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

OP / OB

が成り立つ。

$\dfrac{R_2}{R_3}$ についても同様に考えることにより，$\dfrac{R_2}{R_1}$ は

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{R_2}{R_3} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

OB ① ウ　OA ⓪ エ (2点)

を満たすことがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

エ ⓪ OA	イ ウ ① OB	ア ② OP
③ AB	④ AP	⑤ BP

$\angle OAB = \alpha$ とおく

△OAP, △OAB それぞれ正弦定理を用いて

$$\frac{OP}{\sin\alpha} = 2R_1$$

$$\frac{OB}{\sin\alpha} = 2R_3$$

すなわち $R_1 = \dfrac{\boxed{OP}}{2\sin\alpha}$ ② ア

$R_3 = \dfrac{\boxed{OB}}{2\sin\alpha}$ ① イ

ゆえに $\dfrac{R_1}{R_3} = \dfrac{OP}{OB}$ …①

$\angle OBP = \beta$ とおき，同様にして

$$R_2 = \frac{OP}{2\sin\beta}$$

$$R_3 = \frac{OA}{2\sin\beta}$$

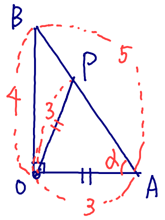
ゆえに $\dfrac{R_2}{R_3} = \dfrac{OP}{OA}$ …②

よって $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R_3}{R_1}\cdot\dfrac{R_2}{R_3} = \dfrac{OB}{OP}\cdot\dfrac{OP}{OA} = \boxed{\dfrac{OB}{OA}}$ …③

① ウ
⓪ エ

(2) OA ＝ 3，OB ＝ 4，AB ＝ 5 とする。R_1，R_2，R_3 の間の大小関係について考えよう。

$3^2+4^2=5^2$ より △OAB は ∠AOB＝90° の直角三角形



(i) 点 P が OP ＝ OA を満たすとき

∠OAB＝α とおくと

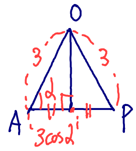
$\cos\alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{3}{5}$

$$AP = \frac{\boxed{18}}{\boxed{5}}$$ オカ キ (2点)

$AP = 2\cdot OA\cos\alpha$

$= 2\cdot 3\cdot\frac{3}{5}$

$= \boxed{\frac{18}{5}}$ オカ キ



である。

(ii) $a = \frac{\boxed{18}}{\boxed{5}}$ とする。

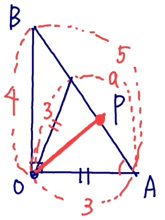
補 △OABの外接円は直径ABの円なので $R_3=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$

$a=\frac{18}{5}$

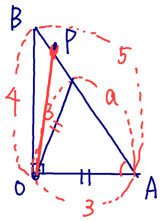
R_1，R_2，R_3 の間の大小関係について，点 P が $0 < AP < a$ を満たすとき $\boxed{⓪}$ である。また，点 P が $a < AP < 5$ を満たすとき $\boxed{①}$ である。

ク $R_1<R_2<R_3$　　ケ (3点) $R_1<R_3<R_2$

あ



い



$\boxed{ク}$，$\boxed{ケ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

ク ⓪ $R_1 < R_2 < R_3$	ケ ① $R_1 < R_3 < R_2$
② $R_2 < R_1 < R_3$	③ $R_2 < R_3 < R_1$
④ $R_3 < R_1 < R_2$	⑤ $R_3 < R_2 < R_1$

OA＝3
OB＝4

①，②から

$\frac{R_1}{R_3}=\frac{OP}{4}$ …①'

$\frac{R_2}{R_3}=\frac{OP}{3}$ …②'

③から

$\frac{R_2}{R_1}=\frac{4}{3}>1$

なので

$R_1<R_2$

あ $0<AP<a$

のとき

$0<OP<3$

なので

$0<\frac{OP}{3}<1$

②'から $\frac{R_2}{R_3}<1$

∴ $R_2<R_3$

よって $\boxed{R_1<R_2<R_3}$ ⓪ク

い $\frac{18}{5}<AP<a$

のとき

$3<OP<4$

なので

$\frac{OP}{4}<1<\frac{OP}{3}$

①'，②'から $\frac{R_1}{R_3}<1<\frac{R_2}{R_3}$　$\times R_3$

よって $\boxed{R_1<R_3<R_2}$ ①ケ