第４問～第７問は，いずれか３問を選択し，解答しなさい。

第７問（選択問題）（配点　16）

〔１〕　a，b，c，d，f を実数とし，x，y の方程式

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$$

について，この方程式が表す座標平面上の図形をコンピュータソフトを用いて表示させる。ただし，このコンピュータソフトでは a，b，c，d，f の値は十分に広い範囲で変化させられるものとする。

a，b，c，d，fの値を$a=2$，$b=1$，$c=-8$，$d=-4$，$f=0$とすると図１のように楕円が表示された。

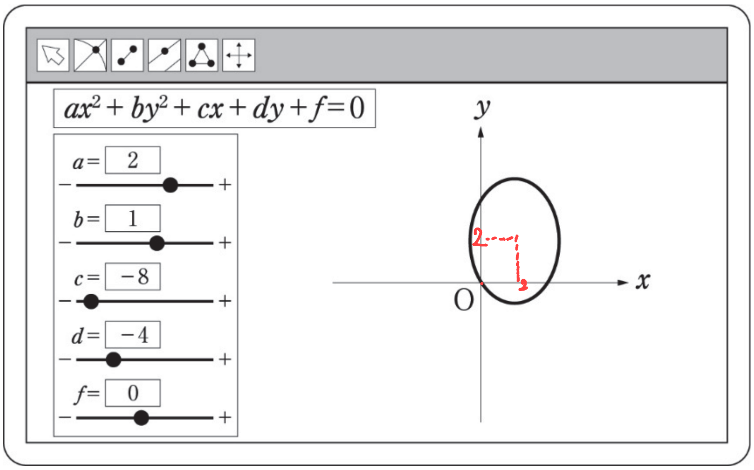


図１

（数学Ⅱ，数学Ｂ，数学Ｃ第７問は次ページに続く。）

$2x^2+y^2-8x-4y=0$

$2(x-2)^2+(y-2)^2=12$

$\dfrac{(x-2)^2}{6}+\dfrac{(y-2)^2}{12}=1$

x軸正方向2
y軸正方向2 平

$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}=1$

中心$(2,2)$
長軸の長さ $4\sqrt{3}$
短軸の長さ $2\sqrt{6}$
焦点$(2,\ 2\pm\sqrt{6})$
のだ円

中心$(0,0)$
長軸の長さ $2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$
短軸の長さ $2\sqrt{6}$
焦点$(0,\ \pm\sqrt{6})$
のだ円

$a=2,\ c=-8,\ d=-4,\ f=0$ と値は変えない

方程式 $ax^2+by^2+cx+dy+f=0$ の a，c，d，f の値は変えずに，b の値だけを $b \geqq 0$ の範囲で変化させたとき，座標平面上には $\boxed{\text{ア}}$ ② 。

ア（4点）

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪	つねに楕円のみが現れ，円は現れない
①	楕円，円が現れ，他の図形は現れない
②	楕円，円，放物線が現れ，他の図形は現れない
③	楕円，円，双曲線が現れ，他の図形は現れない
④	楕円，円，双曲線，放物線が現れ，他の図形は現れない
⑤	楕円，円，双曲線，放物線が現れ，また他の図形が現れることもある

$2x^2+by^2-8x-4y=0$

について

(あ) $b=0$ のとき

$2x^2-8x-4y=0$

$y=\frac{1}{2}x^2-2x$

放物線が現れる

(い) $b>0$ のとき

$2(x-2)^2+b\left(y-\frac{2}{b}\right)^2=\frac{4}{b}+8$

ここで $\frac{4}{b}+8>0$

$b=2$ ならば $2(x-2)^2+2(y-1)^2=10$

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

円が現れる

$b \neq 2$ ならば 楕円が現れる

よって 楕円，円，放物線が現れ，他の図形は現れない $\boxed{②}$ ア

(補) $b<0$ の範囲も考える

(ア) $\frac{4}{b}+8<0$

つまり $-\frac{1}{2}<b<0$ のとき

図形は現れない

(イ) $\frac{4}{b}+8=0$

つまり $b=-\frac{1}{2}$ のとき

$2(x-2)^2-\frac{1}{2}(y+4)^2=0$

$(y+4)^2=4(x-2)^2$

$y+4=\pm 2(x-2)$

2本の直線が現れる

(ウ) $\frac{4}{b}+8>0$

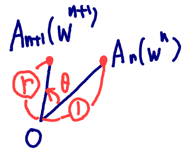
つまり $b<-\frac{1}{2}$ のとき

双曲線が現れる

$|w| = r \ (r>0)$
$\arg w = \theta \ (0<\theta<\pi)$
とすると
$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$w^2 = r(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$
$w^3 = r(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$
$\vdots$
$w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$w^{n+1} = w \cdot w^n$

点$A_n(w^n)$を原点Oを中心にθ回転しr倍した点は$A_{n+1}(w^{n+1})$



〔2〕　太郎さんと花子さんは，複素数wを一つ決めて，w，w^2，w^3，…によって複素数平面上に表されるそれぞれの点A_1，A_2，A_3，…を表示させたときの様子をコンピュータソフトを用いて観察している。ただし，点wは実軸より上にあるとする。つまり，wの偏角を$\arg w$とするとき，$w \neq 0$かつ$0 < \arg w < \pi$を満たすとする。

図1，図2，図3は，wの値を変えて点A_1，A_2，A_3，…，A_{20}を表示させたものである。ただし，観察しやすくするために，図1，図2，図3の間では，表示範囲を変えている。

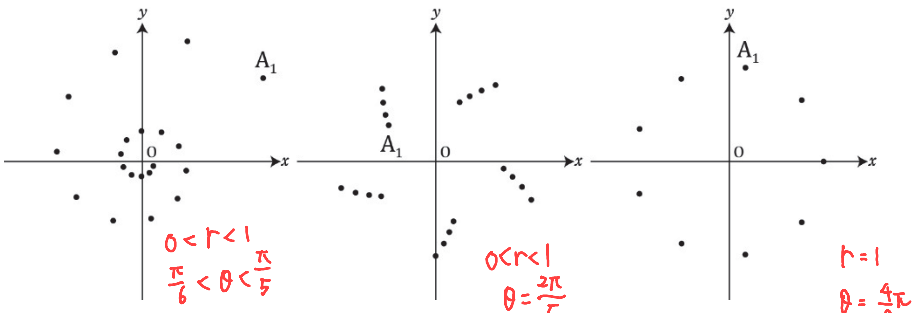


図1　　図2　　図3

太郎：wの値によって，A_1からA_{20}までの点の様子もずいぶんいろいろなパターンがあるね。あれ，図3は点が20個ないよ。

花子：ためしにA_{30}まで表示させても図3は変化しないね。同じところを何度も通っていくんだと思う。

太郎：図3に対して，A_1，A_2，A_3，…と線分で結んで点をたどってみると図4のようになったよ。なるほど，A_1に戻ってきているね。

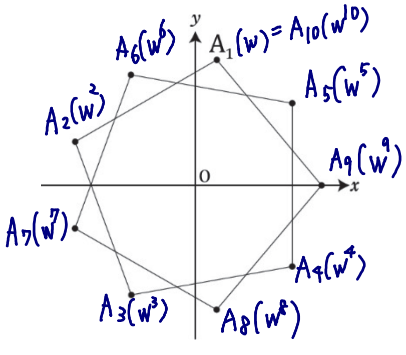


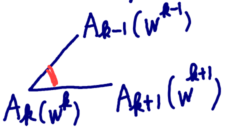
図4

← $|w|=1$のときは
$A_1(w) = A_n(w^n)$
となる自然数nが存在する。
$n=10$として，図4では
A_1からA_{10}までを順に線分で結んでできる図形は正多角形にはならない

$A_1(w)$ と $A_n(w^n)$ が重なるのは
$w = w^n$
より
$|w|^n = |w|$
$|w|(|w|^{n-1} - 1) = 0$
$|w| \neq 0$ なので
$|w|^{n-1} = 1$
よって $|w| = \boxed{1}$ イ…①

・$1 \leqq k \leqq n-1$ に対して
$A_kA_{k+1} = |w^{k+1} - w^k|$
$= |w^k(w-1)|$
$= |w|^k|w-1|$
$= |w-1|$ (∵①)
$\boxed{①}$ ウ

・$2 \leqq k \leqq n-1$ に対して



$\angle A_{k+1}A_kA_{k-1} = \arg \dfrac{w^{k-1} - w^k}{w^{k+1} - w^k}$
$= \arg \dfrac{-w^{k-1}(w-1)}{w^k(w-1)}$
$= \arg\left(-\dfrac{1}{w}\right)$
$\boxed{③}$ エ

図４をもとに，太郎さんは，A_1，A_2，A_3，…と点をとっていって再びA_1に戻る場合に，点を順に線分で結んでできる図形について一般に考えることにした。すなわち，A_1とA_nが重なるような n があるとき，線分A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{n-1}A_n$をかいてできる図形について考える。このとき，$w = w^n$に着目すると $|w| = \boxed{\ 1\ }$ であることがわかる。また，次のことが成り立つ。

イ（1点）

- $1 \leqq k \leqq n-1$に対して$A_kA_{k+1} = \boxed{\ ①\ }$ であり，つねに一定である。

ウ（2点）

- $2 \leqq k \leqq n-1$に対して$\angle A_{k+1}A_kA_{k-1} = \boxed{\ ③\ }$ であり，つねに一定である。

エ（3点）

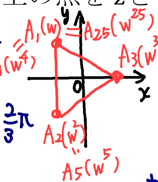
ただし，$\angle A_{k+1}A_kA_{k-1}$は，線分A_kA_{k+1}を線分A_kA_{k-1}に重なるまで回転させた角とする。

角に向きがある！

花子さんは，$n = 25$ のとき，すなわち，A_1とA_{25}が重なるとき，A_1からA_{25}までを順に線分で結んでできる図形が，正多角形になる場合を考えた。このような w の値は全部で $\boxed{\ 6\ }$ 個である。また，このような正多角形についてどの場合であっても，それぞれの正多角形に内接する円上の点を z とすると，z はつねに $\boxed{\ ⑥\ }$ を満たす。

オ（3点）
カ（3点）

(例) $k=3$ のとき $(w^3)^8 = w^{24} = 1$
∴ $w^3 = 1$
$0 < \arg w < \pi$ なので
$w = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$
正３角形になる



$A_1(w)$ と $A_{25}(w^{25})$ が重なるとき
$w = w^{25}$
$|w| = 1$
$w \neq 0$ なので
$w^{24} = 1$
$A_1, A_2, \cdots, A_{25}$ の順に線分を結んでできる図形が正多角形となるのは，周期的に頂点が重なり，１つだけの正多角形になる場合である。
すなわち，k を24の正の約数として $w^k = 1$ をみたし，正 k 角形となる場合で，$k \geqq 3$ であるから
$k = 3, 4, 6, 8, 12, 24$ 6個
これらの k の値に対して $w = \cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k}$ がそれぞれ１つ定まる
よって w の値は $\boxed{6}$ 個 オ

ウ	の解答群

⓪ $\lvert w+1 \rvert$	① $\lvert w-1 \rvert$	② $\lvert w \rvert + 1$	③ $\lvert w \rvert - 1$

多角形の頂点の数は３以上

エ	の解答群

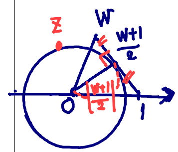
⓪ $\arg w$	① $\arg(-w)$	② $\arg \dfrac{1}{w}$	③ $\arg\left(-\dfrac{1}{w}\right)$

これ以外の k では（$k = 5, 7, 9, 11, 13, 15, \cdots, 23$）図４のようになる。

カ	の解答群

⓪ $\lvert z \rvert = 1$	① $\lvert z - w \rvert = 1$	② $\lvert z \rvert = \lvert w+1 \rvert$
③ $\lvert z \rvert = \lvert w-1 \rvert$	④ $\lvert z - w \rvert = \lvert w+1 \rvert$	⑤ $\lvert z - w \rvert = \lvert w-1 \rvert$
⑥ $\lvert z \rvert = \dfrac{\lvert w+1 \rvert}{2}$	⑦ $\lvert z \rvert = \dfrac{\lvert w-1 \rvert}{2}$	

$w^{24} = 1$
$w^{25} = w$
中点が接点



正多角形に内接する円上の点を z とすると，この円は中心O，半径 $\left|\frac{w+1}{2}\right|$ の円であるから
$|z| = \frac{|w+1|}{2}$ $\boxed{⑥}$ カ