

## 第4問（選択問題）（配点 16）

初項 3、公差  $p$  の等差数列を  $\{a_n\}$  とし、初項 3、公比  $r$  の等比数列を  $\{b_n\}$  とする。ただし、 $p \neq 0$  かつ  $r \neq 0$  とする。さらに、これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ①$$

(1)  $p$  と  $r$  の値を求めよう。自然数  $n$  について、 $a_n$ ,  $a_{n+1}$ ,  $b_n$  はそれぞれ

$$a_n = \boxed{\text{ア}} + (n-1)p \quad \dots\dots ②$$

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ア}} + np \quad \dots\dots ③$$

$$b_n = \boxed{\text{イ}} r^{n-1}$$

と表される。 $r \neq 0$  により、すべての自然数  $n$  について、 $b_n \neq 0$  となる。

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = r$  であることから、①の両辺を  $b_n$  で割ることにより

$$\boxed{\text{ウ}} a_{n+1} = r(a_n + \boxed{\text{エ}}) \quad \dots\dots ④$$

が成り立つことがわかる。④に②と③を代入すると

$$(r - \boxed{\text{オ}})pn = r(p - \boxed{\text{カ}}) + \boxed{\text{キ}} \quad \dots\dots ⑤$$

となる。⑤がすべての  $n$  で成り立つことおよび  $p \neq 0$  により、 $r = \boxed{\text{オ}}$  を得る。さらに、このことから、 $p = \boxed{\text{ク}}$  を得る。

以上から、すべての自然数  $n$  について、 $a_n$  と  $b_n$  が正であることもわかる。

（数学Ⅱ、数学B、数学C第4問は次ページに続く。）

(2) 数列  $\{a_n\}$  に対して、初項 3 の数列  $\{c_n\}$  が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

$a_n$  が正であることから、⑥を変形して、 $c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ケ}} a_{n+1}}{a_n + \boxed{\text{コ}}} c_n$  を得る。

さらに、 $p = \boxed{\text{ク}}$  であることから、数列  $\{c_n\}$  は  $\boxed{\text{サ}}$  ことがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$  の解答群

- ① すべての項が同じ値をとる数列である
- ② 公差が 0 でない等差数列である
- ③ 公比が 1 より大きい等比数列である
- ④ 公比が 1 より小さい等比数列である
- ⑤ 等差数列でも等比数列でもない

(3)  $q, u$  は定数で、 $q \neq 0$  とする。数列  $\{b_n\}$  に対して、初項 3 の数列  $\{d_n\}$  が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$r = \boxed{\text{オ}}$  であることから、⑦を変形して、 $d_{n+1} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{q} (d_n + u)$  を得

る。したがって、数列  $\{d_n\}$  が、公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は、 $q > \boxed{\text{ス}}$  かつ  $u = \boxed{\text{セ}}$  である。