第6問 （選択問題）（配点　16）

Oを原点とする座標空間に，2点A(0，−3，1)，B(1，0，3)がある。Mを空間内の点とし，点Mを通り，直線OBと平行な直線をℓとする。直線OAと直線ℓが交わるかどうかを考えよう。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{m}$とおく。

(1)　空間の2直線が交わることについて，ベクトルを用いて考えてみよう。

(i)　点Pが直線OA上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}$$

を満たす実数sがある。

点Qが直線ℓ上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = t\vec{b}$を満たす実数$t$があり

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{ア}}$$

となる。

したがって

$$s\vec{a} = \boxed{\text{ア}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす実数s，tがあることは，直線OAと直線ℓが交わるための必要十分条件である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪　$\vec{b} + t\vec{m}$	①　$\vec{b} - t\vec{m}$	②　$-\vec{b} + t\vec{m}$
③　$\vec{m} + t\vec{b}$	④　$\vec{m} - t\vec{b}$	⑤　$-\vec{m} + t\vec{b}$

（数学Ⅱ，数学B，数学C第6問は次ページに続く。）

(ii) $\vec{m}=(2,3,5)$とする。① を満たす実数s，tがあると仮定すると，次が成り立つ。

$$(0,\ -3s,\ s)=\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

② の両辺のx成分とy成分がそれぞれ一致するので，$s=\boxed{\text{オカ}}$，$t=\boxed{\text{キク}}$である。このとき ② の両辺のz成分も一致する。したがって，直線OAと直線ℓは交わり，交点の座標は，$\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サシ}}\right)$となる。

(iii) $\vec{m}=(2,3,-5)$とする。① を満たす実数s，tがあると仮定すると，次が成り立つ。

$$(0,\ -3s,\ s)=\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{ス}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

③ の両辺のx成分とy成分がそれぞれ一致するので，$s=\boxed{\text{オカ}}$，$t=\boxed{\text{キク}}$である。しかし，このとき ③ の両辺のz成分は一致しないので，③ が成り立つことに矛盾する。したがって，直線OAと直線ℓは交わらない。

$\boxed{\text{イ}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 2	① 3	② 5
③ $2+t$	④ $2-t$	⑤ $5+3t$
⑥ $5-3t$	⑦ $-5+3t$	⑧ $-5-3t$

(数学Ⅱ，数学B，数学C第6問は次ページに続く。)

(2) 直線 OA と直線 ℓ が交わるための $\vec{m}$ の条件について考えよう。

$\vec{e}=(0, 0, 1)$ とする。M が空間内のどのような点であっても，$\vec{m}$ は，実数 α，β，γ を用いて

$$\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{e} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

の形でただ一通りに表すことができる。

(i) $\vec{m}=(2, 3, 5)$ とする。(1)の(ii)より，$s=$ $\boxed{\text{オカ}}$，$t=$ $\boxed{\text{キク}}$ のとき s，t は①を満たす。したがって，④を満たす実数 α，β，γ は，$\alpha=$ $\boxed{\text{セソ}}$，$\beta=$ $\boxed{\text{タ}}$，$\gamma=$ $\boxed{\text{チ}}$ である。

(ii) $\vec{m}=(2, 3, -5)$ とする。$\vec{m}=(2, 3, 5)-$ $\boxed{\text{ツテ}}$ $\vec{e}$ より，④を満たす実数 α，β，γ は，$\alpha=$ $\boxed{\text{セソ}}$，$\beta=$ $\boxed{\text{タ}}$，$\gamma=$ $\boxed{\text{トナニ}}$ である。

(iii) 直線 OA と直線 ℓ が交わるとき，①を満たす実数 s，t があるので，$\vec{m}=$ $\boxed{\text{ヌ}}$ $\vec{a}+$ $\boxed{\text{ネ}}$ $\vec{b}$ となる。したがって，$\vec{m}$ を④の形で表すとき，$\gamma=0$ である。

逆に，$\gamma=0$ であるとき，直線 OA と直線 ℓ が交わることが確かめられる。

以上のことから

実数 α，β を用いて $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ と表せる

ことは，直線 OA と直線 ℓ が交わるための必要十分条件である。

$\boxed{\text{ヌ}}$，$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ s	① $(-s)$	② t	③ $(-t)$
④ $(s+t)$	⑤ $(s-t)$	⑥ $(-s+t)$	⑦ $(-s-t)$

(数学Ⅱ，数学B，数学C第6問は次ページに続く。)

(3) $\vec{c}=(2,3,5)$，$\vec{d}=(2,3,-5)$とおく。(1)の(ii)と(iii)から，$\vec{m}=\vec{c}$のとき，直線OAと直線ℓは交わるが，$\vec{m}=\vec{d}$のときは，直線OAと直線ℓは交わらない。(2)を利用すると，次のことがわかる。

(Ⅰ) $\vec{m}=13\vec{c}$のとき，直線OAと直線ℓは $\boxed{\text{ノ}}$ 。

(Ⅱ) $\vec{m}=\vec{b}+9\vec{d}$のとき，直線OAと直線ℓは $\boxed{\text{ハ}}$ 。

(Ⅲ) $\vec{m}=8\vec{a}-11\vec{d}$のとき，直線OAと直線$\ell$は $\boxed{\text{ヒ}}$ 。

$\boxed{\text{ノ}}$ ～ $\boxed{\text{ヒ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 交わる	① 交わらない