

第4問 (選択問題) (配点 16)

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次の式で定める。

$$a_1 = -3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{アイ}} \left(\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} \right)^{n-1}$ である。

n が奇数であれば $a_n \boxed{\text{カ}} 0$ が成り立つ。また, n が偶数であれば $a_n \boxed{\text{キ}} 0$ が成り立つ。

$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① <	② =	③ >
-----	-----	-----

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第4問は次ページに続く。)

(2) 数列 $\{b_n\}$ を次の式で定める。

$$b_1 = -3, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n - 9 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき

$$b_{n+1} + \boxed{\text{ク}} = -\frac{1}{2}\left(b_n + \boxed{\text{ク}}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。したがって、 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ケ}} \left(\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^{n-1} - \boxed{\text{ス}}$$

である。

$$\text{すべての自然数 } n \text{ について } \left(\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^{n-1} \leq A \text{ が成り立つような最小の実数}$$

A は、 $A = \boxed{\text{セ}}$ である。

以上のことから、数列 $\{b_n\}$ に関する記述として、次の①～③のうち、正しいものは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

- ① すべての自然数 n について $b_n < 0$ が成り立つ。
- ② すべての自然数 n について $b_n > 0$ が成り立つ。
- ③ $b_k < 0$ となる自然数 k があり、 $b_\ell > 0$ となる自然数 ℓ もある。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C 第4問は次ページに続く。)

数学Ⅱ, 数学B, 数学C

(3) α を実数とする。数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める。

$$c_1 = \alpha,$$

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n^2 + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

花子さんと太郎さんは、数列 $\{c_n\}$ について話している。

花子：一般項 c_n を求めてみようか。

太郎：一般項を式で表すのは難しそうだから、 α と n をいろいろ変えてみて、 c_n の具体的な値を調べてみよう。

花子：コンピュータでたくさん計算してみたけれど、 $-4 \leq c_n \leq 4$ が成り立つことが多いね。

太郎： $-4 \leq c_k \leq 4$ が成り立つと、 $-4 \leq c_{k+1} \leq 4$ も成り立つように見えるね。

(i) 太郎さんは、次の**命題1**が真であることを証明しようと考えた。

命題1 k を自然数とする。 $-4 \leq c_k \leq 4$ が成り立つならば、
 $-4 \leq c_{k+1} \leq 4$ が成り立つ。

数列 $\{c_n\}$ は $\textcircled{1}$ を満たすので、次が成り立つ。

• すべての自然数 k について、 $c_{k+1} \leq 4$ は、タ。

• すべての自然数 k について、 $-4 \leq c_{k+1}$ は、チ。

したがって、**命題1**は真である。また、**命題1**を用いると、数学的帰納法により次の**命題2**が真であることがわかる。

命題2 $-4 \leq \alpha \leq 4$ ならば、すべての自然数 n について $-4 \leq c_n \leq 4$ が成り立つ。

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第4問は次ページに続く。)

タ, チ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① c_k の値によらず成り立つ
- ② c_k の値によらず成り立たない
- ③ $c_k \leq 4$ ならば成り立ち, $4 < c_k$ ならば成り立たない
- ④ $-4 \leq c_k$ ならば成り立ち, $c_k < -4$ ならば成り立たない
- ⑤ $-4 \leq c_k \leq 4$ ならば成り立ち, $c_k < -4$ または $4 < c_k$ ならば成り立たない

(ii) 表1は, コンピュータによる計算結果の一部をまとめたものである。ただし, c_4 の値は小数第4位を四捨五入したものである。

表 1

	c_1	c_2	c_3	c_4
$\alpha = 1$	1	3.5	- 2.125	1.742
$\alpha = 5$	5	- 8.5	- 32.125	- 512.008

α を変えて得られる数列 $\{c_n\}$ に関する次の命題 (I), (II), (III) について, 真偽の組合せとして正しいものは ツ である。

- (I) $\alpha > 4$ ならば, すべての自然数 n について $c_n > 4$ が成り立つ。
- (II) $\alpha \leq 4$ ならば, すべての自然数 n について $c_n \leq 4$ が成り立つ。
- (III) $\alpha < 0$ ならば, すべての自然数 n について $c_n < 0$ が成り立つ。

ツ の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	真	真	真	真	偽	偽	偽
(II)	真	真	偽	偽	真	真	偽
(III)	真	偽	真	偽	真	偽	偽