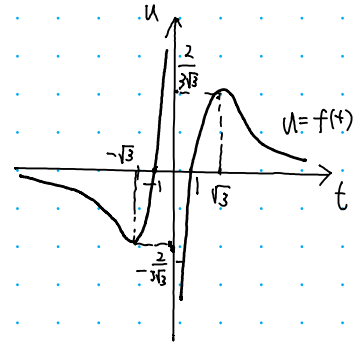
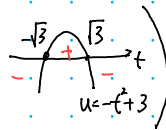


(1) $f(t) = \frac{t^2-1}{t^3}$ ($t \neq 0$) の増減を調べ、グラフの概形をかく

$f(-t) = -f(t)$ より $u = f(t)$ のグラフは原点对称である。

$$f'(t) = \frac{2t \cdot t^3 - (t^2-1) \cdot 3t^2}{t^6} = \frac{2t^4 - 3t^2(t^2-1)}{t^6} = \frac{-t^2+3}{t^4} = \frac{-t^2+3}{t^4}$$



t	$(-\infty)$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	(∞)
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	(0)	$\downarrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\uparrow$	(0)

$u = f(t)$ のグラフの概形は右図

(2) 実数 x, y, z

$$\begin{cases} x < y < z & \dots ① \\ xy \neq 0 & \dots ② \\ x^3y^2 - x^2 = x^2y^3 - y^3 & \dots ③ \\ y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3 & \dots ④ \end{cases}$$

x の取り得る値の範囲

② より $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ かつ $z \neq 0$

③ $\Leftrightarrow x^3(y^2-1) = y^3(x^2-1) \Leftrightarrow \frac{y^2-1}{y^3} = \frac{x^2-1}{x^3} \therefore f(y) = f(x)$

④ $\Leftrightarrow y^3(z^2-1) = z^3(y^2-1) \Leftrightarrow \frac{z^2-1}{z^3} = \frac{y^2-1}{y^3} \therefore f(z) = f(y)$

条件は ① かつ $f(x) = f(y) = f(z)$

$$f(x) = f(y) = f(z) = k$$

とみると

$$\begin{cases} u = f(t) \\ u = k \end{cases}$$

のグラフが異なる3つの共有点をもつことから

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} < k < 0 \quad \text{または} \quad 0 < k < \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

3つの共有点の t 座標は x, y, z ($x < y < z$)

⑩ $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < k < 0$ のとき $x < -\sqrt{3}$

⑪ $0 < k < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ のとき

$$f(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{とすると} \quad \frac{t^2-1}{t^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$2t^3 - 3\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3} = 0$$

$$(t-\sqrt{3})^2(2t+\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって ⑩, ⑪ より

$$x < -\sqrt{3}, -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

