

→ 表(確率 p) と 裏(確率 $1-p$) とする。

0 点 1 点
 xx を 終了 (確率 $(1-p)^2$)

ゲームが終了したときに n 点となっている確率を Q_n

(1) Q_1, Q_2

1 点

OXX
XOXX

2 点

OOXX
OXOX
XOOX
XOXOXX

$$Q_1 = p(1-p)^2 + p(1-p)^3 = p(1-p)^2(2-p)$$

$$Q_2 = p^2(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + p^2(1-p)^4 = p^2(1-p)^2(2-p)^2$$

(2) $(n+1)$ 回後に終了する確率

O n 点 終了 XO n 点

$$Q_{n+1} = pQ_n + (1-p)pQ_n$$

$$= p(2-p)Q_n$$

$$Q_n = Q_0 p(2-p)^n = (1-p)^2 p(2-p)^n$$

(3) 1 点加算の確率は O または XO より $p + (1-p)p = p(2-p)$ ①

終了する確率は xx より $(1-p)^2$ ②

(1) ① × ② $Q_1 = p(2-p)(1-p)^2$

①² × ② $Q_2 = p^2(2-p)^2(1-p)^2$

(2) ①ⁿ × ② $Q_n = p^n(2-p)^n(1-p)^2$

(3) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (0 < x < 1)$ ①

証明 $S_N = \sum_{n=0}^N (n+1)x^n$

とすると

$$S_N = x^0 + 2x + 3x^2 + \dots + (N+1)x^N$$

$$-xS_N = x + 2x^2 + \dots + Nx^N + (N+1)x^{N+1}$$

$$(1-x)S_N = 1 + x + x^2 + \dots + x^N - (N+1)x^{N+1}$$

$$= \frac{1-x^{N+1}}{1-x} - (N+1)x^{N+1}$$

$$\therefore S_N = \frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} - \frac{(N+1)x^{N+1}}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} - \frac{(N+1)x^{N+1}}{1-x} \right\}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

よって ① は示された。

(3) $S_N = \sum_{n=0}^N (x^{n+1})' = \left(\sum_{n=0}^N x^{n+1} \right)'$

$$= \left(x \cdot \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \right)'$$

$$= \left(\frac{x - x^{N+2}}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{(1-(N+2)x^{N+1})(1-x) - (x - x^{N+2})(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - (N+2)x^{N+1} - x + x^{N+2} + x - x^{N+2}}{(1-x)^2}$$

$$\rightarrow \frac{1-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n Q_n$ を p を用いて表す $\leftarrow$ 点数の期待値

(2) ① $\sum_{n=0}^{\infty} n Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} n (1-p)^2 \{p(2-p)\}^n$ $\leftarrow n=0$ の項は 0

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) (1-p)^2 \{p(2-p)\}^{m+1} \quad (\because n=m+1 \text{ とおくと})$$

$$= (1-p)^2 p(2-p) \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \{p(2-p)\}^m \quad \leftarrow (3)$$

$$= (1-p)^2 p(2-p) \cdot \frac{1}{(1-p(2-p))^2}$$

$$= \frac{(1-p)^2 p(2-p)}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{p(2-p)}{(1-p)^2}$$

$$\left(\because p(2-p) = -(p-1)^2 + 1 \right. \\ \left. 0 < p < 1 \text{ なら } 0 < p(2-p) < 1 \text{ であり } (1-p(2-p)) > 0 \right)$$

② $X_k = \begin{cases} 1 & (0 \leq k-1 \leq X_0) \\ 0 & (X_k) \end{cases}$

よって $X = X_1 + X_2 + \dots$

$E(X_k) = p(2-p)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n Q_n = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \dots$$

$$= p(2-p) + \{p(2-p)\}^2 + \dots$$

$$= \frac{p(2-p)}{1-p(2-p)}$$

$$= \frac{p(2-p)}{(1-p)^2}$$

$\rightarrow$ 初項 $p(2-p)$
公比 $p(2-p)$
の無限等比級数