

3

(60 点)

$0 < p < 1$ とする. 表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1 - p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う.

- ゲームの開始段階で点数は 0 点.
- コインを投げ続け, 表が出るごとに 1 点加算し, 裏が出たときは点数はそのまま.
- 2 回続けて裏が出たらゲームは終了.

0 以上の整数 n に対し, ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする.

- (1) Q_1, Q_2 を p を用いて表せ.
- (2) Q_n を n と p を用いて表せ.
- (3) $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

必要ならば $0 < x < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ であることを証明なしで使ってもよい.

- (4) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ.