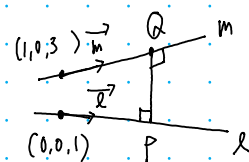


(1) P, Q の座標, 線分 PQ の長

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \cdot \vec{m} = -1 \\ |\vec{x}| = \sqrt{2} \\ |\vec{m}| = \sqrt{5} \end{array} \right.$$



とす。

$O(0,0,0)$, P, Q を実数とて

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p\vec{x}, \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + q\vec{m}$$

と表せて

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + q\vec{m} - p\vec{x}$$

$$q = 1 - 2p$$

$$-4 + 5(1 - 2p) + p = 0$$

$$9p = 1$$

$$\therefore p = \frac{1}{9}$$

$$q = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\vec{PQ} \perp \vec{x} \text{ かつ } \vec{PQ} \perp \vec{m} \text{ であるから } \vec{PQ} \cdot \vec{x} = 0 \text{ かつ } \vec{PQ} \cdot \vec{m} = 0$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + q\vec{x} \cdot \vec{m} - p|\vec{x}|^2 = 1 - q - 2p = 0$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{m} + q|\vec{m}|^2 - p\vec{x} \cdot \vec{m} = -4 + 5q + p = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{9}, \quad q = \frac{7}{9}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left[P\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 1\right), Q\left(1, \frac{7}{9}, \frac{13}{9}\right) \right]$$

$$\vec{PQ} = \left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9} \right) = \frac{4}{9} (2, 2, 1)$$

$$PQ = \frac{4}{9} \sqrt{9} = \frac{4}{3}$$

(2) 四面体 $ABCD$ の体積 $V(t)$ と $V(0)$ を求める

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2+t+\sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (2+t+\cos t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より

$$\vec{AB} = (2+\sin t)\vec{x}$$

$$\vec{CD} = (2+\cos t)\vec{m}$$

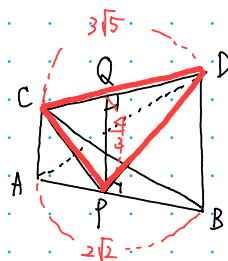
$$t=0 \text{ のとき } \vec{AB} = 2\vec{x}, \quad \vec{CD} = 3\vec{m}$$

$$\triangle PCD \text{ の面積 } S \text{ とすると } S = \frac{1}{2} CD \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{4}{3} = 2\sqrt{5}$$

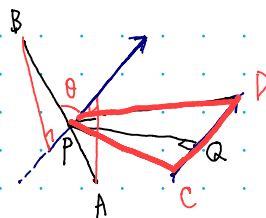
$$\vec{AB} \text{ と } \vec{CD} \text{ のなす角を } \theta \text{ とすると } \cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{m}}{|\vec{x}| |\vec{m}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって

$$V(0) = \frac{1}{3} S \cdot AB \sin \theta = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{4}{3}$$



← $\triangle PCD$ を底面とみる



(3) $V(t) (t \geq 0)$ の $\frac{\text{最大値}}{\text{最大値}}$ と $\frac{\text{最小値}}{\text{最小値}}$

(2) の $t=0$ で $|\overrightarrow{AB}| \leq \frac{2+\sin t}{2}$ より $|\overrightarrow{CD}| \leq \frac{2+\cos t}{3}$ 倍するこを考慮

← (2) と同様にできる

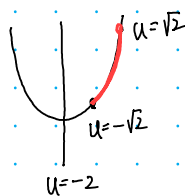
$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{2+\sin t}{2} \cdot \frac{2+\cos t}{3} V(0) \\ &= \frac{2}{3} (2+\sin t)(2+\cos t) \\ &= \frac{2}{3} \{ 4 + 2(\sin t + \cos t) + \sin t \cos t \} \end{aligned}$$

← $\sin t$ と $\cos t$ の対称式

$$\begin{aligned} \sin t + \cos t &= u \\ \text{とすると} \quad \sin t \cos t &= \frac{u^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ -1 \leq \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad \text{より} \quad -\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{2}{3} \left(4 + 2u + \frac{u^2 - 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} (u^2 + 4u + 7) \\ &= \frac{1}{3} \{ (u+2)^2 + 3 \} \end{aligned}$$



$V(t)$ は $u = \sqrt{2}$ で最大, $u = -\sqrt{2}$ で最小となる

$$V(t) \text{ の } \begin{array}{l} \text{最大値} \quad 3 + \frac{4}{3}\sqrt{2} \\ \text{最小値} \quad 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{array}$$