数学C　空間のベクトル

座標空間 / 座標平面に平行な平面の方程式 / 空間ベクトルの1次結合 /
空間内の1次独立なベクトル / 1次独立の空間ベクトルの性質 /
空間ベクトルの1次独立と1次結合 / 1次結合の空間ベクトルの平行条件 /
空間ベクトルの成分表示 / 成分表示の空間ベクトルの相等 /
成分表示の空間ベクトルの大きさ /
空間ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（行ベクトル）/
空間ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（列ベクトル）/
座標空間のベクトルの成分表示と大きさ（2点間の距離）/
空間ベクトルの展開 / 成分表示の空間ベクトルの内積 /
成分表示の空間ベクトルの垂直条件 / 点が平面上にある条件（共面条件）/
球のベクトル方程式（ベクトルを用いて球を表わす式）/
座標空間の球面の方程式 / 座標空間の球面の方程式の一般形 /
平面と直線が垂直 / 平面と直線が垂直な条件 / ★平面と法線ベクトル /
★平面の方程式 / ★平面の方程式の一般形 /
★座標空間の平面と法線ベクトル /
★x切片，y切片，z切片がわかる平面の方程式 / ★点と平面の距離 /
★ベクトルの外積 / ★ベクトルの外積の性質 /
★座標空間の直線の方程式 / ★成分表示の空間ベクトルの内積と不等式 /

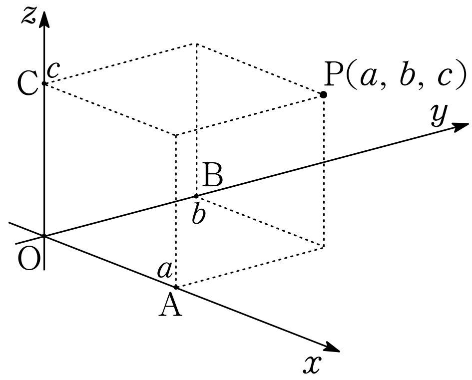
座標空間

空間に点Oをとり，Oで互いに直交する3つの座標軸を定める．

これらをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸 という．

またOを 原点 という．

さらに



$\boxed{1}$ x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面という．

$\boxed{2}$ y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面という．

$\boxed{3}$ z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面という．

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて 座標平面（ざひょう） という．

空間の点Pに対して，点Pを通り各座標軸に垂直な直線が

x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を，それぞれA，B，Cとする．

A，B，Cの各座標軸上での座標がそれぞれ a，b，c のとき，

3つの実数の組 (a, b, c) を 点Pの座標 といい P(a, b, c) とかく．

このとき a を x 座標，b を y 座標，c を z 座標 という．

また O$(0, 0, 0)$，A$(a, 0, 0)$，B$(0, b, 0)$，C$(0, 0, c)$ である．

座標軸の定められた空間を 座標空間（ざひょうくうかん） という．

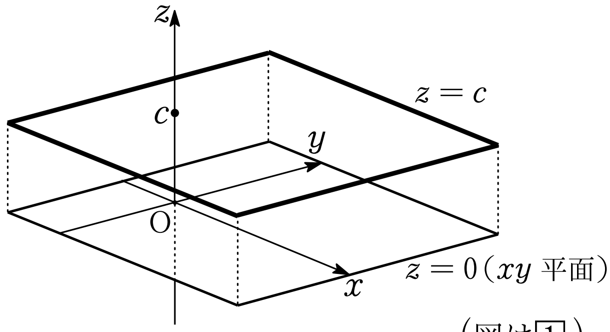
とくに何も条件がないときは，座標空間の座標軸は x 軸，y 軸，z 軸として考える．

㊤補 2つの軸で平面上の点を表すのが座標平面．
3つの軸で空間内の点を表すのが座標空間．

座標平面に平行な平面の方程式

座標空間において

1. xy 平面の方程式は $z=0$
2. yz 平面の方程式は $x=0$
3. zx 平面の方程式は $y=0$



座標平面に平行な平面の方程式について （図は1）

1. xy 平面に平行で z 軸上の点 $(0,\ 0,\ c)$ を通る平面の方程式は $z=c$
2. yz 平面に平行で x 軸上の点 $(a,\ 0,\ 0)$ を通る平面の方程式は $x=a$
3. zx 平面に平行で y 軸上の点 $(0,\ b,\ 0)$ を通る平面の方程式は $y=b$

補 1 の平面は z 軸に垂直，2 の平面は x 軸に垂直，3 の平面は y 軸に垂直でもある．

要

空間ベクトルも平面ベクトルと同じ性質をもつ．

補 平面ベクトルと同じ内容になるものはここでは割愛することにする．

空間ベクトルの 1 次結合

3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対し，実数 s，t，u を用いて

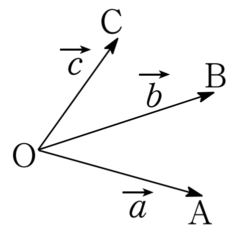
$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表されることを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の **1次結合**（いちじけつごう）という．

㊋ 「1 次結合」の一般的な定義は「ベクトルを複数のベクトルの定数倍の和で表すこと」
空間ベクトルは 3 つのベクトルの実数倍の和で表せる．

空間内の1次独立なベクトル

3つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1次独立（いちじどくりつ）であるとは

次の条件を満たすことである．



$\boxed{1}$ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は同一平面上にない

$\boxed{2}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

4点 O，A，B，C が同一平面上にない

$\boxed{3}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと 四面体OABCが存在する

$\boxed{4}$ 実数 x, y, z に対し

$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ ならば $x=0$ かつ $y=0$ かつ $z=0$

補 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ は同値

注「$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{c}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ かつ $\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ かつ $\vec{c}\not\parallel\vec{a}$」とするのは間違い．

話 $\boxed{4}$ が一般的な定義であるが，高校では $\boxed{1}$ を定義としている．（教科書で確認済）

1次独立を線形独立（せんけいどくりつ）ということもある．

1次独立でないことを1次従属（いちじじゅうぞく）または線形従属（せんけいじゅうぞく）という．

注「$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{c}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ かつ $\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ かつ $\vec{c}\not\parallel\vec{a}$」とするのは間違い．
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が同一平面上にある場合があるからで，これは1次従属である．

1次独立の空間ベクトルの性質

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は1次独立，x, y, z, s, t, u を実数として次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\boxed{2}$ $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c} \iff \begin{cases} x=s \\ y=t \\ z=u \end{cases}$

考 $\boxed{1}$ ($\Longrightarrow$ について)

$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ ……①

① のとき $z \neq 0$ と仮定すると $\vec{c}=-\dfrac{x}{z}\vec{a}-\dfrac{y}{z}\vec{b}$

これは $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が同一平面にあるので矛盾する．

このことから $z=0$ であり ① は $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ ……①′

①′ のとき $y \neq 0$ と仮定すると $\vec{b}=-\dfrac{x}{y}\vec{a}$

これは $x=0$ ならば $\vec{b}=\vec{0}$ となり矛盾する．

$x \neq 0$ ならば $\vec{a} \neq \vec{0}$ であるから $\vec{b} /\!/ \vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より3点O，A，Bは同一直線上にあることから，4点O，A，B，Cは同一平面上にある．

これは $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が同一平面にあるので矛盾する．

ゆえに $y=0$ であり ①′ は $x\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ であるから $x=0$ である．

($\Longleftarrow$ について)

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ ならば $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c}=\vec{0}$ である．

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} & x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c} \\ \iff & (x-s)\vec{a}+(y-t)\vec{b}+(z-u)\vec{c}=\vec{0} \\ \iff & \begin{cases} x-s=0 \\ y-t=0 \\ z-u=0 \end{cases} \quad (\because \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は1次独立，} x-s, y-t, z-u \text{ は実数より} \boxed{1}) \\ \iff & \begin{cases} x=s \\ y=t \\ z=u \end{cases} \end{aligned}$$

補 定義より自明ではある．

空間ベクトルの 1 次独立と 1 次結合

空間内の任意のベクトル $\vec{p}$ は，1 次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\ \ (x,\ y,\ z\text{ は実数})$$

の形でただ 1 通りで表される.

㊂ 1 次独立な空間ベクトルの性質

㊓ 空間内のベクトル $\vec{p}$ に対して，(x, y, z) の組がただ 1 つ決まる.

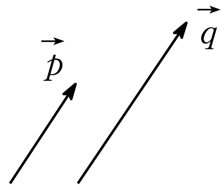
㊓ 空間ベクトルにおいて，1 次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を 基底（きてい） という.
座標空間のすべての点 (x, y, z) は x 軸，y 軸，z 軸の 3 つの軸から表せるが，
それと同じで，空間内のすべてのベクトルは 1 次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せる.

1 次結合の空間ベクトルの平行条件

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立，x，y，z，s，t，u を 0 以外の実数として，

3 つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ が

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$
$$\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$



と表されるとき

$$\vec{p} \mathbin{/\!/} \vec{q} \iff x : y : u = s : t : u$$

㊜ $\boxed{\text{1 次結合の平面ベクトルの平行条件}}$

㊟ $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$

$\vec{q} = 2\vec{a} + 4\vec{b} + 6\vec{c}$

について

$\vec{q} = 2\vec{p}$

と表せるので $\vec{p} \mathbin{/\!/} \vec{q}$

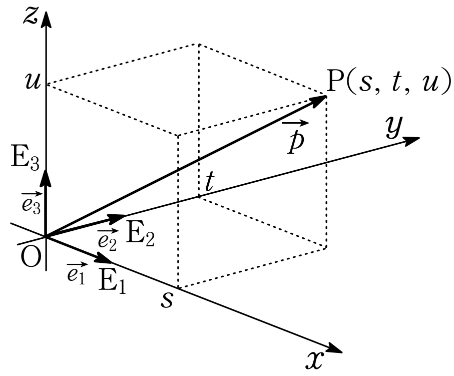
このとき $1 : 2 : 3 = 2 : 4 : 6$

空間ベクトルの成分表示

座標空間において，点 O を原点，点 $E_1(1,\,0,\,0)$，$E_2(0,\,1,\,0)$，$E_3(0,\,0,\,1)$ とする x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを座標軸に関する基本ベクトルといい，それぞれ

$$\vec{e_1}=\overrightarrow{OE_1},\ \vec{e_2}=\overrightarrow{OE_2},\ \vec{e_3}=\overrightarrow{OE_3}$$

とする．



このとき $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ となる点 $P(s,\,t,\,u)$ をとると

$$\vec{p}=s\vec{e_1}+t\vec{e_2}+u\vec{e_3}$$

とただ 1 通りで表せて，これを $\vec{p}$ の基本ベクトル表示 という．

さらに $\vec{p}=(s,\,t,\,u)$ または $\vec{p}=\begin{pmatrix}s\\t\\u\end{pmatrix}$ のように表し，

ベクトル $\vec{p}$ の 成分表示（せいぶんひょうじ） という．

ここで s を $\vec{p}$ の x 成分，t を $\vec{p}$ の y 成分，u を $\vec{p}$ の z 成分 という．

とくに $\vec{0}$，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ の成分表示は

$$\vec{0}=(0,\,0,\,0),\ \vec{e_1}=(1,\,0,\,0),\ \vec{e_2}=(0,\,1,\,0),\ \vec{e_3}=(0,\,0,\,1)$$

参 平面ベクトルの成分表示

例 点 $P(3,\,2,\,4)$ として $\vec{p}=\overrightarrow{OP}=(3,\,2,\,4)$ と表せる．

$\vec{p}=(3,\,2,\,4)$ は $\vec{e_1}=(1,\,0,\,0)$ は $\vec{e_2}=(0,\,1,\,0)$，$\vec{e_3}=(0,\,0,\,1)$ を用いて

$$(3,\,2,\,4)=3(1,\,0,\,0)+2(0,\,1,\,0)+4(0,\,0,\,1)\quad \text{すなわち}\quad \vec{p}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}+4\vec{e_3}$$

とただ 1 通りで表せる．

これを列ベクトルでかくと

$\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$ は $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ は $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{すなわち}\quad \vec{p}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}+4\vec{e_3}$$

$\vec{p}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}+4\vec{e_3}$ を $\vec{p}$ の基本ベクトル表示といい，

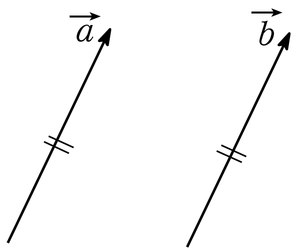
$\vec{p}=(3,\,2,\,4)$ または $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$ を $\vec{p}$ の成分表示という．

$\vec{p}$ の x 成分は 3，y 成分は 2，z 成分は 4 である．

成分表示の空間ベクトルの相等

$\vec{a}=(a,\,b,\,c),\ \vec{b}=(x,\,y,\,z)$ のとき

$$\vec{a}=\vec{b} \iff \begin{cases} a=x \\ b=y \\ c=z \end{cases}$$



㊟ 同じ空間ベクトルならば，x 成分と y 成分と z 成分がすべて等しい．

成分表示の空間ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a,\ b,\ c)$ のとき

$\vec{a}$ の大きさは $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

つまり $(\vec{a}$ の大きさ$)=\sqrt{(x\text{ 成分})^2+(y\text{ 成分})^2+(z\text{ 成分})^2}$

例 $\vec{a}=(3,\ 4,\ 5)$ のとき $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

空間ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（行ベクトル）

$\vec{a}=(a,\ b,\ c)$，$\vec{b}=(x,\ y,\ z)$，k は実数 のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=(a,\ b,\ c)+(x,\ y,\ z)=(a+x,\ b+y,\ c+z)$

差：$\vec{a}-\vec{b}=(a,\ b,\ c)-(x,\ y,\ z)=(a-x,\ b-y,\ c-z)$

実数倍：$k\vec{a}=k(a,\ b,\ c)=(ka,\ kb,\ kc)$

まとめて s，t を実数として

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s(a,\ b,\ c)+t(x,\ y,\ z)=(sa+tx,\ sb+ty,\ sc+tz)$$

例 $\vec{a}=(3,\ 2,\ 4)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$ のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 2,\ 4)+(2,\ 1,\ 3)=(3+2,\ 2+1,\ 4+3)=(5,\ 3,\ 7)$

差：$\vec{a}-\vec{b}=(3,\ 2,\ 4)-(2,\ 1,\ 3)=(3-2,\ 2-1,\ 4-3)=(1,\ 1,\ 1)$

実数倍：$5\vec{a}=5(3,\ 2,\ 4)=(5\cdot 3,\ 5\cdot 2,\ 5\cdot 4)=(15,\ 10,\ 20)$

$5\vec{a}+3\vec{b}=5(3,\ 2,\ 4)+3(2,\ 1,\ 3)=(21,\ 13,\ 29)$

空間ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（列ベクトル）

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, k は実数 のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+x\\b+y\\c+z\end{pmatrix}$

差：$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-x\\b-y\\c-z\end{pmatrix}$

実数倍：$k\vec{a}=k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}$

まとめて s, t を実数として

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa+tx\\sb+ty\\sc+tz\end{pmatrix}$$

㊙例 $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\\2+1\\4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}$

差：$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\2-1\\4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

実数倍：$5\vec{a}=5\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 3\\5\cdot 2\\5\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\\20\end{pmatrix}$

$5\vec{a}+3\vec{b}=5\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\13\\29\end{pmatrix}$

座標空間のベクトルの成分表示と大きさ（2点間の距離）

座標空間の2点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$，$\mathrm{B}(s,\ t,\ u)$ のとき

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s-a,\ t-b,\ u-c)$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(s-a)^2+(t-b)^2+(u-c)^2}$

つまり

$$\left(2\text{点間の距離}\right)=\sqrt{(x\text{座標の差})^2+(y\text{座標の差})^2+(z\text{座標の差})^2}$$

考 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ として $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ c)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s,\ t,\ u)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-a,\ t-b,\ u-c)$

補 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは2点A，Bの距離

例 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 2,\ 4)$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-1,\ 2-1,\ 4-1)=(2,\ 1,\ 3)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$

空間ベクトルの展開

x，y，z を実数として

$$\left|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right|^2$$
$$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+y^2\left|\vec{b}\right|^2+z^2\left|\vec{c}\right|^2+2xy\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2yz\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2zx\,\vec{c}\cdot\vec{a}$$

参考 平面ベクトルの展開

$$\left|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right|^2$$
$$=(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})$$
$$=x^2\vec{a}\cdot\vec{a}+xy\vec{a}\cdot\vec{b}+xz\vec{a}\cdot\vec{c}+xy\vec{b}\cdot\vec{a}+y^2\vec{b}\cdot\vec{b}+zx\vec{c}\cdot\vec{a}+zy\vec{c}\cdot\vec{b}+z^2\vec{c}\cdot\vec{c}$$
$$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+y^2\left|\vec{b}\right|^2+z^2\left|\vec{c}\right|^2+2xy\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2yz\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2zx\,\vec{c}\cdot\vec{a}$$

例 $\left|2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}\right|^2=4\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2+16\left|\vec{c}\right|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+16\vec{c}\cdot\vec{a}$

成分表示の空間ベクトルの内積

$\vec{a}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{b}=(x,\ y,\ z)$ のとき

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by+cz$

㊂ 成分表示の平面ベクトルの内積

㊗ 平面ベクトルと同様に余弦定理から示せる.

㊟ $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくと

$\left|\vec{e_1}\right|=\left|\vec{e_2}\right|=\left|\vec{e_3}\right|=1$ ……①

$\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$, $\vec{e_2}\perp\vec{e_3}$, $\vec{e_3}\perp\vec{e_1}$ より $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}=0$ ……②

$\vec{a}=(a,\ b,\ c)=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}$

$\vec{b}=(x,\ y,\ z)=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}\right)\cdot\left(x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}\right)\\&=ax\left|\vec{e_1}\right|^2+by\left|\vec{e_2}\right|^2+cz\left|\vec{e_3}\right|^2\\&\quad+ay\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+az\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}+bx\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}+bz\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}+cx\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}+cy\vec{e_3}\cdot\vec{e_2}\\&=ax+by+cz\ \ (\because ①,\ ②)\end{aligned}$$

㊕ $\vec{a}=(3,\ 2,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$ のとき

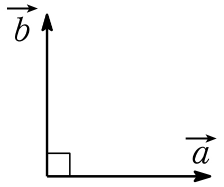
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2+2\cdot1+4\cdot3=20$

成分表示の空間ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ とする.

$\vec{a} = (a,\ b,\ c)$, $\vec{b} = (x,\ y,\ z)$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff ax + by + cz = 0$$



参考 $\boxed{\text{成分表示の平面ベクトルの垂直条件}}$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ となる条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

例 $\vec{a} = (3,\ 4,\ 2)$ と $\vec{b} = (x,\ 1,\ 1)$ が垂直ならば

$$3x + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$$

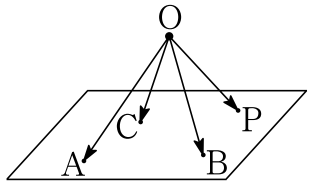
よって　$x = -2$

点が平面上にある条件（共面条件）

同一直線上にない異なる3点A，B，Cがあり，

点Oを任意の点とする．

点Pが平面ABC上に存在する条件は次である．



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 $s,\ t$ が存在する．

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 $s,\ t$ が存在する．

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 $s,\ t$ が存在する．

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ かつ $x+y+z=1$

となる実数 x，y，z が存在する．

㊀考 $\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で張られる平面上に点Pがある．

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （$\because$ $\boxed{1}$）

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ で始点をOとすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ で $1-s-t=x$，$s=y$，$t=z$ とおくと $x+y+z=(1-s-t)+s+t=1$

㊞補 点Oが平面ABC上にあっても成り立つ．

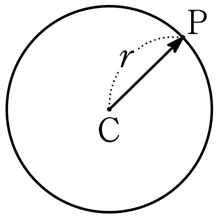
球のベクトル方程式（ベクトルを用いて球を表わす式）

空間内で

中心が点 C，半径が r $(r>0)$ の球を点 P が表すとき

$\boxed{1}$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=r$

$\boxed{2}$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=r$



と表せる．

これを **球のベクトル方程式** という．

補 円のベクトル方程式（ベクトルを用いて円を表わす式）

考 $\boxed{1}$ 中心 C と点 P の距離が r

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で始点を O にする．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\text{中心の位置ベクトル})\right|=(\text{半径})$

と表せる．

座標空間の球面の方程式

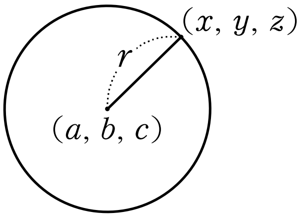
座標空間において

中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

とくに　中心が原点 $(0,\ 0,\ 0)$，半径 r の球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$



補 一般形は $x^2+y^2+z^2+kx+\ell y+mz+n=0$

例 中心 $(1,\ 2,\ 3)$，半径 5 の球面の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$$

展開して整理すると　$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$

球面の方程式の一般形

座標空間の球面の方程式の一般形は

$$x^2+y^2+z^2+sx+ty+uz+v=0$$

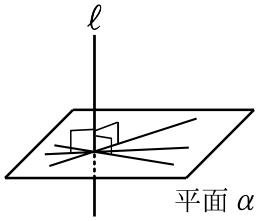
ただし　$s,\ t,\ u,\ v$ は定数，$s^2+t^2+u^2>4v$

□平面と直線が垂直

平面 α と直線 ℓ について

直線 ℓ が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき

ℓ と α は **垂直**であるといい　$\alpha \perp \ell$　とかく.

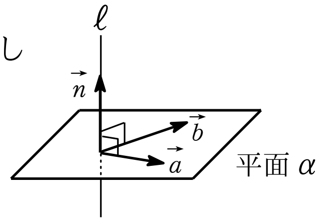


平面と直線が垂直な条件

平面 α 上にある任意の 1 次独立な 2 つのベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とし

直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{n}$ とすると

$$\alpha \perp \ell \iff \vec{a} \perp \vec{n} \text{ かつ } \vec{b} \perp \vec{n}$$



考 ($\Longrightarrow$ について)

平面 $\alpha \perp \ell$ ならば，平面 α 上の任意の $\vec{0}$ でないベクトルが $\vec{n}$ に垂直であることから

$\vec{a} \perp \vec{n}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{n}$

($\Longleftarrow$ について)

$\vec{a} \perp \vec{n}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{n}$ ならば $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ かつ $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ ……①

平面 α 上に異なる 2 点 P，Q をとり，さらに 1 点 O をとると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$

となる実数 s，t，s'，t' が存在し

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (s' - s)\vec{a} + (t' - t)\vec{b}$

と表わせる．

これより $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{n} = (s' - s)\vec{a} \cdot \vec{n} + (t' - t)\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ ($\because$ ①)

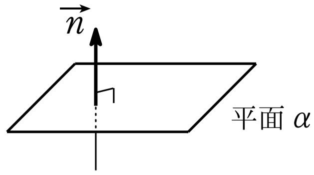
よって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{n} \neq \vec{0}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{n}$

すなわち $\alpha \perp \ell$

平面の法線ベクトル

平面 α 上の $\vec{0}$ 以外の任意のベクトルと垂直になる $\vec{n}$ を

平面 α の **法線ベクトル**（ほうせん）という.



㊟ 平面には法線ベクトルが必ず存在する.

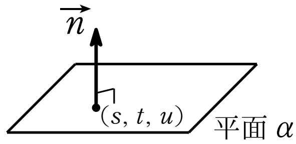
★平面の方程式

$(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$ とする．

座標空間で点 $(s,\ t,\ u)$ を通り，法線ベクトルの 1 つが $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$

である平面の方程式は

$$a(x-s)+b(y-t)+c(z-u)=0$$



すなわち

$$ax+by+cz+d=0 \quad \text{ただし} \quad d=-as-bt-cz$$

㋕ 点 $\mathrm{A}(s,\ t,\ u)$，平面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると

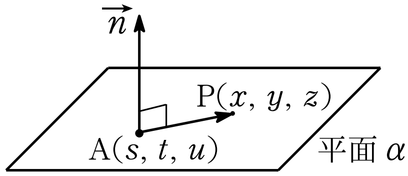
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-s,\ y-t,\ z-u)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$ であるから $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

これより $a(x-s)+b(y-t)+c(z-u)=0$

展開して $ax+by+cz-as-bt-cu=0$

$-as-bt-cu=d$ として $ax+by+cz+d=0$



㊇ 点 $(1,\ 1,\ 1)$ を通り，法線ベクトルの 1 つが $\vec{n} = (2,\ 3,\ 4)$ である平面の方程式は

$2(x-1)+3(y-1)+4(z-1)=0$

すなわち

$2x+3y+4z-9=0$

★平面の方程式の一般形

座標空間の平面の方程式の一般形は

$$ax+by+cz+d=0$$

ただし $a,\ b,\ c,\ d$ は定数，$(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$

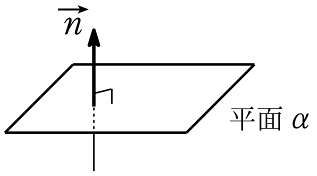
★座標空間での平面と法線ベクトル

$(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$, $a,\ b,\ c,\ d$ は定数とする.

座標空間で平面 α の方程式が

$$ax+by+cz+d=0$$

ならば $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ は平面 α の法線ベクトルの 1 つ.



㊎ 平面 $2x+3y+4z-9=0$ の法線ベクトルの 1 つは

$\vec{n}=(2,\ 3,\ 4)$

㊓ 法線ベクトルの「1 つ」としたのは平行なベクトルが無数にある.

x 切片，y 切片，z 切片がわかる平面の方程式

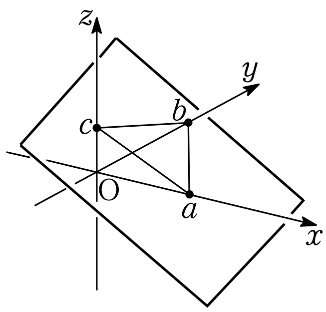
$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ とする.

x 切片が a, y 切片が b, z 切片 c の平面

つまり 3 点 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ を通る平面

の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



例 座標空間で 3 点 $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$ を通る平面の方程式は

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1$ すなわち $2x+3y+6z=6$

★点と平面の距離

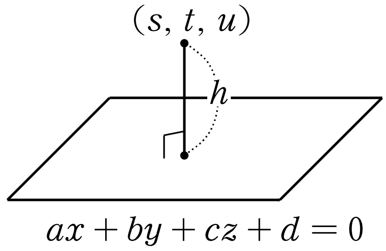
$(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$，$a,\ b,\ c,\ d$ は定数とする．

座標空間において

点 $(s,\ t,\ u)$ と平面：$ax+by+cz+d=0$

の距離を h とすると

$$h=\frac{|as+bt+cu+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



㊂ 平面：$ax+by+cz+d=0$ ……①

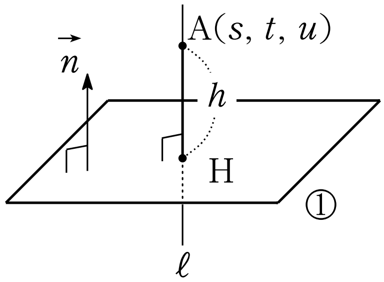
$\mathrm{A}(s,\ t,\ u)$ とおき，点 A を通り ① に垂直な直線を ℓ とし，ℓ と ① の交点を H とする．

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とすると $\vec{n}$ は ① の法線ベクトルである．

$\vec{n} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{0}$ より実数 k が存在し

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ ……②

と表せる．



$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\vec{n}\\&=(s,\ t,\ u)+k(a,\ b,\ c)\\&=(s+ak,\ t+bk,\ u+ck)\end{aligned}$$

点 H は ① 上にあるので

$$a(s+ak)+b(t+bk)+c(u+ck)+d=0$$

すなわち $(a^2+b^2+c^2)k=-(as+bt+cu+d)$

$a^2+b^2+c^2 \neq 0$ であるから $k=-\dfrac{as+bt+cu+d}{a^2+b^2+c^2}$ ……③

また $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ……④

② から $h=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=|k||\vec{n}|$

$$\begin{aligned}&=\frac{|as+bt+cu+d|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\quad(\because ③,\ ④)\\&=\frac{|as+bt+cu+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

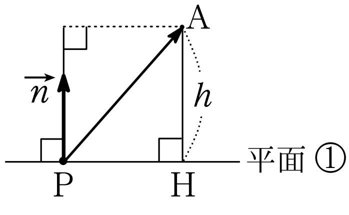
㊖ 平面上に点 $\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$ をとると ① 上にあるから $ap+bq+cz+d=0$ ……①′

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(s-p,\ t-q,\ u-r)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}&=a(s-p)+b(t-q)+c(u-r)=as+bt+cu-(ap+bq+cr)\\&=as+bt+cr+d\quad(\because ①')\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の $\vec{n}$ 上への正射影ベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ の大きさが h なので

$$h=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|as+bt+cu+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



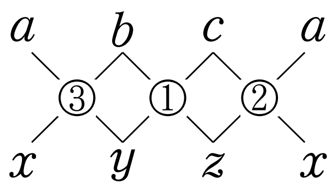
㊟ 点と直線の距離も同じように示せる．

ベクトルの外積

座標空間において

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ c)$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y,\ z)$



のとき

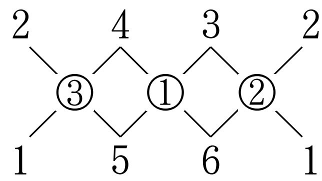
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(bz\overset{①}{-}cy,\ cx\overset{②}{-}az,\ ay\overset{③}{-}bx)$$

を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の **外積**（がいせき） という．

㊓ 内積は実数だが，外積はベクトルになる．

㊫ 右上図のように $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の各成分を書き出して，x 成分は 1 列目と 4 列目に書く．
番号の順にたすきにかけて引く（左上 × 右下 − 右上 × 左下）ことで外積の成分が求まる．
① が x 成分，② が y 成分，③ が z 成分になる．

㊄ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 4,\ 3)$
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 5,\ 6)$



とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=(4\cdot6\overset{①}{-}3\cdot5,\ 3\cdot1\overset{②}{-}2\cdot6,\ 2\cdot5\overset{③}{-}4\cdot1)\\&=(9,\ -9,\ 6)\\&=3(3,\ -3,\ 2)\end{aligned}$$

この外積が使い方を具体例で説明すると次になる．

$\vec{n}=(3,\ -3,\ 2)$ とおくと

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\cdot3+4\cdot(-3)+3\cdot2=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\cdot3+5\cdot(-3)+6\cdot2=0$

ゆえに $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，$\vec{n}\perp$ 平面 OAB もわかる．

このように，外積から「2 つの空間ベクトルに垂直なベクトル」が求まり，

平面の法線ベクトルもわかる．

3 点 O(0, 0, 0)，A(2, 4, 3)，B(1, 5, 6) を通る平面の方程式は，

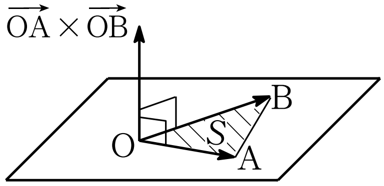
法線ベクトルの 1 つが $\vec{n}=(3,\ -3,\ 2)$ であり，原点を通るので

$$3x-3y+2z=0$$

★ベクトルの外積の性質

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は1次独立とする.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の外積について，次の性質が成り立つ.



1. $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

2. △OAB の面積を S とすると $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$

3. $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

すなわち $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp$ 平面OAB

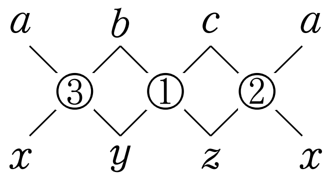
考 1　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ c)$

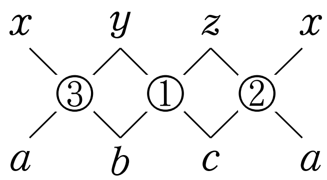
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y,\ z)$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(bz\overset{①}{-}cy,\ cx\overset{②}{-}az,\ ay\overset{③}{-}bx)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(cy\overset{①}{-}bz,\ az\overset{②}{-}cx,\ bx\overset{③}{-}ay)\\&=-(bz-cy,\ cx-az,\ ya-bx)\\&=-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$





2 $$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2abxy-2bcyz-2cazx}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2}\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\end{aligned}$$

3 $$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)\\&=abz-acy+bcx-abz+acy-bcx\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=x(bz-cy)+y(cx-az)+z(ay-bx)\\&=bxz-cxy+cxy-ayz+ayz-bxz\\&=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$S>0$ であるから 2 より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$

よって $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

補 2 において，$c=0$, $z=0$ とする．つまり

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y,\ 0)$

とすると $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(ay-bx)^2}=\dfrac{1}{2}|ay-bx|$

これは平面での三角形の面積公式.

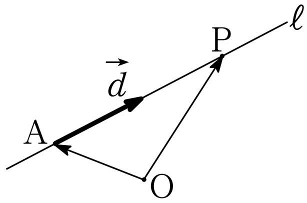
★座標空間の直線の方程式

座標空間において

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ q,\ r)$ の直線を ℓ とする．

ℓ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}\quad \text{すなわち}\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$$



$\boxed{1}$ $p\neq 0,\ q\neq 0,\ r\neq 0$ のとき

$$\ell: \frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$$

$\boxed{2}$ $p\neq 0,\ q\neq 0,\ r=0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ q,\ 0)$ の直線で

$$\ell: \frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q},\ z=c$$（xy 平面に平行な直線）

$\boxed{3}$ $p\neq 0,\ q=0,\ r\neq 0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ 0,\ r)$ の直線で

$$\ell: \frac{x-a}{p}=\frac{z-c}{r},\ y=b$$（zx 平面に平行な直線）

$\boxed{4}$ $p=0,\ q\neq 0,\ r\neq 0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(0,\ q,\ r)$ の直線で

$$\ell: \frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r},\ x=a$$（yz 平面に平行な直線）

$\boxed{5}$ $p\neq 0,\ q=0,\ r=0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(p,\ 0,\ 0)$ の直線で

$\ell: y=b,\ z=c$（x 軸に平行な直線）

$\boxed{6}$ $p=0,\ q\neq 0,\ r=0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(0,\ q,\ 0)$ の直線で

$\ell: x=a,\ z=c$（y 軸に平行な直線）

$\boxed{7}$ $p=0,\ q=0,\ r\neq 0$ のとき

点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(0,\ 0,\ r)$ の直線で

$\ell: x=a,\ y=b$（z 軸に平行な直線）

考 t を消去した方程式

★成分表示の空間ベクトルの内積と不等式

$\vec{p}=(a,\ b,\ c),\ \vec{q}=(x,\ y,\ z)$ のとき

$$\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)^2 \leqq \left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2$$

つまり

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

等号が成り立つのは $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=\vec{0}$ または $\vec{p}\parallel\vec{q}$

すなわち $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ または $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$

または $a:b:c=x:y:z$

参 成分表示の平面ベクトルの内積と不等式