

数学Ⅲ 極限「数列の極限」

無限大 / 数列の極限 / ★数列の極限の意味 / 発散 / 正の無限大に発散 /
負の無限大に発散 / 振動 / 数列の極限の分類 / 数列 $\{kn\}$ の極限 /
数列 $\{n^k\}$ の極限 / 不定形 / 収束する2つの数列の極限 /

収束する数列と正の無限大に発散する数列の極限 /

正の無限大に発散する2つの数列の極限 / 等差数列 $\{an + b\}$ の極限 /

数列 $\{an^2 + bn + c\}$ の極限 / 数列 $\{an^3 + bn^2 + cn + d\}$ の極限 /

数列 $\left\{ \frac{an + b}{pn + q} \right\}$ の極限 / 数列 $\left\{ \frac{an^2 + bn + c}{pn^2 + qn + r} \right\}$ の極限 /

数列 $\left\{ \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{pn^3 + qn^2 + rn + s} \right\}$ の極限 / 数列 $\left\{ \frac{an + b}{pn^2 + qn + r} \right\}$ の極限 /

数列 $\left\{ \frac{an^2 + bn + c}{pn + q} \right\}$ の極限 /

$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ ($\infty - \infty$ の不定形) を含む数列の極限 /

収束する2つの数列の極限値の大小関係 /

追い出しの原理 / はさみうちの原理 / ☆絶対値と極限 I /

☆絶対値と極限 II / 等比数列 $\{r^n\}$ の極限 /

数列 $\{a^n - b^n\}$ ($\infty - \infty$ の不定形) の極限 / 数列 $\left\{ \frac{k \cdot a^n + \ell \cdot b^n}{p \cdot a^n + q \cdot b^n} \right\}$ の極限 /

★数列 $\{nr^n\}$ の極限 / ★部分列 / ★数列の極限と部分列の極限 I /

★数列の極限と部分列の極限 II / ★数列の極限と部分列の極限 III /

漸化式と数列の極限 / 不等式の漸化式 $A_{n+1} \leq r A_n$ の変形 /

☆漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ を変形して求める極限 /

無限級数 / 無限級数の部分和 / 無限級数の和 /

収束する2つの無限級数と和 / 無限等比級数の和 /

無限級数の収束・発散 I / 無限級数の収束・発散 II /

無限大

変数 x の値をどんな正の数よりも大きくすることを

x を限りなく大きくする といひ $x \rightarrow \infty$ と表す.

この記号 ∞ を ^{むげんだい}無限大 といひ.

注意として ∞ は値や数を表すものではない.

⑨ ∞ は値や数ではないので $\infty + \infty = 2 \times \infty$, $\infty - \infty = 0$ のような計算はできない.
あくまでも, 限りのない大ききすることを記号で表しているだけ.

数列の極限

無限数列 $\{a_n\}$ において

n を限りなく大ききするとき a_n が一定の値 α に限りなく近づき ならば

数列 $\{a_n\}$ は α に ^{しゅうそく}収束するといひ, α を 数列 $\{a_n\}$ の ^{きよくげんち}極限值 といひ.

このとき, 次のように書き表わす.

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

⑨ $\lim$ は極限を意味する limit に由来する記号で「リミット」と読む.

⑨ 数列 $\{a_n\}$ の極限は α であるともいひ.

⑨ $a_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \text{ として } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \rightarrow 0$$

分子は定数 1 で, 分母が大きくなっていくので 0 に近づきのがわかる.

$y = \frac{1}{x}$ のグラフをイメージして, x を自然数 n にして考えてもわかる.

1 つのものを n 人で分ける分け前と考えると, 沢山の人で分けると分け前はほぼ 0 になる.

直感的だと言われそうだが, 高校数学の極限ではこのくらいの直感は許されている.

$$\text{上のことを書き表すと } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

これを数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束するといひ.

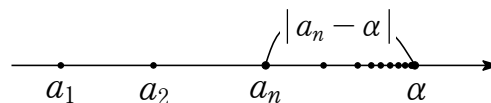
念のため $\frac{1}{n} = 0$ となることではなく, $\frac{1}{n}$ が 0 に近づきということである.

★数列の極限の意味

無限数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

数直線上で点 a_n と点 α の距離 $|a_n - \alpha|$ が

いくらでも小さくなるということである.



すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$

⑧ 「 a_n が α に近づく」ということは「 a_n と α の距離が小さくなる」ということである.

⑨ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = 0$

⑩ 大学の数学では、無限数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを次のように厳密に定義する.

任意の正の数 ε に対して、ある自然数 m が定まり、

$n > m$ であるどのような自然数 n に対しても $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる.

⑪ イプシロン
 ε はギリシャ文字でアルファベットの e に相当する.

発散

無限数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき 数列 $\{a_n\}$ は ^{はっさん}発散する という.

- ⑨ 「無限数列 $\{a_n\}$ が収束しない」とは
 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 」となる一定値 α が存在しないということ.

正の無限大に発散

無限数列 $\{a_n\}$ において

n を限りなく大きくするとき a_n が限りなく大きくなる ならば

数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するという.

このとき, 次のように書き表わす.

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

- ⑨ 数列 $\{a_n\}$ の極限は正の無限大ともいう.
 ⑩ $a_n = n^2$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

負の無限大に発散

無限数列 $\{a_n\}$ において

n を限りなく大きくするとき a_n が負で, その絶対値が限りなく大きくなる

ならば 数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するという.

このとき, 次のように書き表わす.

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow -\infty \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

- ⑨ 数列 $\{a_n\}$ の極限は負の無限大ともいう.
 ⑩ $a_n = -n^2$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$
 ⑪ $-\infty$ と区別する意味で ∞ を $+\infty$ と書くことがある.

振動

発散する無限数列 $\{a_n\}$ が正の無限大にも負の無限大にも発散しないならば

数列 $\{a_n\}$ は ^{しんどう}振動する という.

⑨ $a_n = (-1)^n$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & (n \text{ が奇数}) \\ 1 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$

数列 $\{a_n\}$ は一定の値に近づいてないので収束しないで、発散する.

正の無限大にも負の無限大にも発散しないので、数列 $\{a_n\}$ は振動するという.

数列の極限の分類

無限数列の極限を分類すると次のようになる.

$$\text{数列の極限} \left\{ \begin{array}{ll} \text{収束} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{極限值は } \alpha \text{ である} \\ \text{発散} & \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty & \text{正の無限大に発散する} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty & \text{負の無限大に発散する} \\ \text{振 動} & \text{極限は定まらない} \end{cases} \end{array} \right.$$

⑩ 補 数列の極限は「収束」か「発散」のいずれかになる.

数列 $\{kn\}$ の極限

k を定数とする. 無限数列 $\{kn\}$ の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} kn = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$$

とくに 数列 $\{kn\}$ が収束する $\iff k = 0$

① 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$

② 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

③ 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n) = -\infty$

数列 $\{n^k\}$ の極限

k を定数とする. 無限数列 $\{n^k\}$ の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ 1 & (k = 0) \\ \infty & (k > 0) \end{cases}$$

とくに 数列 $\{n^k\}$ が収束する $\iff k \leq 0$

① 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

② 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

③ 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

不定形

収束，発散が定まらない極限を ^{ふていけい}不定形 という。

補 「不定形」という用語は教科書には書かれていない。

例 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ は収束，発散が定まらないので不定形。
次のように収束する場合と発散する場合がある。

あ $a_n = n, b_n = n^2$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ であり } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ (収束)}$$

い $a_n = n^2, b_n = n$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ であり } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ (発散)}$$

このような不定形を「 $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形」と言うことがある。

例 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ は収束，発散が定まらないので不定形。
次のように収束する場合と発散する場合がある。

あ $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ であり } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

い $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n^2}$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ であり } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

このような不定形を「 $\frac{0}{0}$ の不定形」と言うことがある。

例 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ は収束，発散が定まらないので不定形。
次のように収束する場合と発散する場合がある。

あ $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ であり } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ (収束)}$$

い $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n^2$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ であり } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ (発散)}$$

このような不定形を「 $0 \cdot \infty$ の不定形」と言うことがある。

補 不定形には「 $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形」「 $\frac{0}{0}$ の不定形」「 $0 \cdot \infty$ の不定形」があったが他にもある。
(「 $\infty - \infty$ の不定形」など)

不定形の極限は「収束，発散がわかるような形」に変形することが大事である。

収束する2つの数列の極限

2つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする.

このとき, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad k \text{ を定数として } \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

$$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3} \text{ をまとめて 実数 } s, t \text{ に対して } \lim_{n \rightarrow \infty} (s a_n + t b_n) = s \alpha + t \beta$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

$$\boxed{5} \quad \beta \neq 0 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\beta = 0 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \text{発散} & (\alpha \neq 0) \\ \text{不定形} & (\alpha = 0) \end{cases}$$

⑧ 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ とする.

$$\boxed{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 5a_n = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2 + 3 = 5$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 2 - 3 = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5a_n + 6b_n) = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 28$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$$

収束する数列と正の無限大に発散する数列の極限

無限数列 $\{a_n\}$ が定数 α に収束, 無限数列 $\{b_n\}$ が正の無限大に発散

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ とする.

このとき, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad k \text{ を定数として } \lim_{n \rightarrow \infty} k b_n = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \begin{cases} \infty & (\alpha > 0) \\ \text{不定形} & (\alpha = 0) \\ -\infty & (\alpha < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$\boxed{6} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \text{ は発散}$$

⑧ 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ とする.

$$\boxed{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 5b_n = \infty$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$\boxed{6} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n \cdot \frac{1}{a_n} \right) = \infty$$

正の無限大に発散する2つの数列の極限

2つの無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに正の無限大に発散

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ とする.

このとき, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad k \text{ を定数として } \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \text{ は不定形}$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ は不定形}$$

⑧ 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ とする.

$$\boxed{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 5a_n = \infty$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \text{ は不定形 (下の ⑨ で説明する)}$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ は不定形 (不定形の ⑧ で説明している)}$$

⑨ 補 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ は収束, 発散が定まらないので不定形.
次のように収束する場合と発散する場合がある.

⑩ あ $a_n = n$, $b_n = n$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ であり}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \text{ (収束)}$$

⑪ い $a_n = n^2$, $b_n = n$ の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ であり}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\} = \infty \text{ (発散)}$$

このような不定形を「 $\infty - \infty$ の不定形」と言うことがある.

等差数列 $\{an + b\}$ の極限

a, b を定数とする. 無限数列 $\{an + b\}$ の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (an + b) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ b & (a = 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

とくに 数列 $\{an + b\}$ が収束する $\iff a = 0$

① $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3) = \infty$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n + 3) = -\infty$

数列 $\{an^2 + bn + c\}$ の極限

a, b, c を定数, $a \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (an^2 + bn + c) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

① $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n + 1) = \infty$

これは, $n \rightarrow \infty$ とすると, n^2 は $n + 1$ に比べて速く大きくなるので, n^2 に着目する.
直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $n^2 + n + 1 \asymp n^2$ 」というイメージをもっておきたい.

具体的な例をあげると

$$n = 10^2 \text{ のとき } n^2 + n + 1 = 10^4 + 10^2 + 1 \asymp 10^4$$

10, 101 円 (一万百一円) はほぼ一万円というイメージ.

$$n = 10^4 \text{ のとき } n^2 + n + 1 = 10^8 + 10^4 + 1 \asymp 10^8$$

100, 010, 001 円 (一億一万一円) はほぼ一億円というイメージ.

このように $n + 1$ は n^2 に比べて小さすぎるので, 極限に影響しない.

n^2 の項が極限に最も影響を与えることから, n^2 に着目して変形するとよい.

基本的には, 極限に最も影響を与える項でくくって, 次のように変形する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\} = \infty$$

多項式の形の極限だと最高次の項が極限にもっとも影響を与える.

② 直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $an^2 + bn + c \asymp an^2$ 」

極限に最も影響を与える項は an^2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (an^2 + bn + c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ an^2 \left(1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} \right) \right\}$$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - 6n + 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5n^2 \left(1 - \frac{6}{5n} + \frac{3}{5n^2} \right) \right\} = \infty$

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5n^2 + 6n + 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -5n^2 \left(1 + \frac{6}{5n} - \frac{3}{5n^2} \right) \right\} = -\infty$

数列 $\{an^3 + bn^2 + cn + d\}$ の極限

a, b, c, d を定数, $a \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (an^3 + bn^2 + cn + d) = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

⑤ 直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $an^3 + bn^2 + cn + d \asymp an^3$ 」

極限に最も影響を与える項は an^3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (an^3 + bn^2 + cn + d) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ an^3 \left(1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} + \frac{d}{an^3} \right) \right\}$$

⑥ $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^3 - 6n^2 + 3n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5n^3 \left(1 - \frac{6}{5n} + \frac{3}{5n^2} + \frac{1}{5n^3} \right) \right\} = \infty$

⑦ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5n^3 + 6n^2 + 3n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -5n^3 \left(1 - \frac{6}{5n} - \frac{3}{5n^2} - \frac{1}{5n^3} \right) \right\} = -\infty$

数列 $\left\{ \frac{an+b}{pn+q} \right\}$ の極限

a, b, p, q を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{pn+q} = \frac{a}{p}$$

⑧ 直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $an+b \doteq an, pn+q \doteq pn$ 」

これより $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{an+b}{pn+q} \doteq \frac{an}{pn} = \frac{a}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{pn+q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an \left(1 + \frac{b}{an} \right)}{pn \left(1 + \frac{q}{pn} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{p} \cdot \frac{1 + \frac{b}{an}}{1 + \frac{q}{pn}} \\ &= \frac{a}{p} \end{aligned}$$

⑨ 次数が等しい多項式の分数の極限は分子と分母の最高次の係数の比になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を n でわる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{pn+q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n}}{p + \frac{q}{n}} = \frac{a}{p}$$

⑪ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-4}{5n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{n}}{5 + \frac{6}{n}} = \frac{3}{5}$

数列 $\left\{ \frac{an^2 + bn + c}{pn^2 + qn + r} \right\}$ の極限

a, b, c, p, q, r を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{pn^2 + qn + r} = \frac{a}{p}$$

⑧ 直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $an^2 + bn + c \asymp an^2, pn^2 + qn + r \asymp pn^2$ 」

これより $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{an^2 + bn + c}{pn^2 + qn + r} \asymp \frac{an^2}{pn^2} = \frac{a}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{pn^2 + qn + r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 \left(1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} \right)}{pn^2 \left(1 + \frac{q}{pn} + \frac{r}{pn^2} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{p} \cdot \frac{1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2}}{1 + \frac{q}{pn} + \frac{r}{pn^2}} \\ &= \frac{a}{p} \end{aligned}$$

⑨ 次数が等しい多項式の分数の極限は分子と分母の最高次の係数の比になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を n^2 でわる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{pn^2 + qn + r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{p + \frac{q}{n} + \frac{r}{n^2}} = \frac{a}{p}$$

⑪

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 1}{5n^2 + 6n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

数列 $\left\{ \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{pn^3 + qn^2 + rn + s} \right\}$ の極限

a, b, c, d, p, q, r, s を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{pn^3 + qn^2 + rn + s} = \frac{a}{p}$$

⑧ 直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $an^3 + bn^2 + cn + d \asymp an^3, pn^3 + qn^2 + rn + s \asymp pn^3$ 」

これより $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{pn^3 + qn^2 + rn + s} \asymp \frac{an^3}{pn^3} = \frac{a}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{pn^3 + qn^2 + rn + s} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 \left(1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} + \frac{d}{an^3} \right)}{pn^3 \left(1 + \frac{q}{pn} + \frac{r}{pn^2} + \frac{s}{pn^3} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{p} \cdot \frac{1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} + \frac{d}{an^3}}{1 + \frac{q}{pn} + \frac{r}{pn^2} + \frac{s}{pn^3}} \\ &= \frac{a}{p} \end{aligned}$$

⑨ 次数が等しい多項式の分数の極限は分子と分母の最高次の係数の比になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を n^3 でわる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{pn^3 + qn^2 + rn + s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3}}{p + \frac{q}{n} + \frac{r}{n^2} + \frac{s}{n^3}} = \frac{a}{p}$$

⑪

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + n + 2}{5n^3 + 6n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{5 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{5}$$

数列 $\left\{ \frac{an + b}{pn^2 + qn + r} \right\}$ の極限

a, b, p, q, r を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{pn^2 + qn + r} = 0$$

⑧ 直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $an + b \asymp an, pn^2 + qn + r \asymp pn^2$ 」

これより $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{an + b}{pn^2 + qn + r} \asymp \frac{an}{pn^2} = \frac{a}{pn}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{pn^2 + qn + r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an \left(1 + \frac{b}{an} \right)}{pn^2 \left(1 + \frac{q}{pn} + \frac{r}{pn^2} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{pn} \cdot \frac{1 + \frac{b}{an}}{1 + \frac{q}{pn} + \frac{r}{pn^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

直感的には分母が分子より速く絶対値が大きくなるので 0 に収束する.

⑨ 次数が分子よりも分母が大きい多項式の分数の極限は 0 になる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を n でわる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{pn^2 + qn + r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n}}{pn + q + \frac{r}{n}} = 0$$

⑪ (分母と分子を n^2 でわる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{pn^2 + qn + r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}}{p + \frac{q}{n} + \frac{r}{n^2}} = \frac{0}{p} = 0$$

⑫ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 4}{5n^2 + 6n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{n}}{5n + 6 + \frac{3}{n}} = 0$

⑬ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 4}{5n^2 + 6n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}}{5 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{5} = 0$

数列 $\left\{ \frac{an^2 + bn + c}{pn + q} \right\}$ の極限

a, b, c, p, q を定数, $a \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{pn + q} = \begin{cases} \infty & (ap > 0) \\ -\infty & (ap < 0) \end{cases}$$

⑧ 直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $an^2 + bn + c \asymp an^2, pn + q \asymp pn$ 」

これより $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{an^2 + bn + c}{pn + q} \asymp \frac{an^2}{pn} = \frac{a}{p}n$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{pn + q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 \left(1 + \frac{b}{an} + \frac{c}{an^2} \right)}{pn \left(1 + \frac{q}{pn} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{p} n \cdot \frac{1 + \frac{b}{an}}{1 + \frac{q}{pn} + \frac{r}{pn^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{a}{p} > 0 \text{ つまり } ap > 0 \text{ のとき } \infty \\ \frac{a}{p} < 0 \text{ つまり } ap < 0 \text{ のとき } -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

直感的には分子が分母より速く絶対値が大きくなるので発散する。

⑨ 次数が分母よりも分子が大きい多項式の分数の極限は発散する。

下の ⑩ のように変形することもできる。

⑩ (分母と分子を n でわる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{pn + q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{p + \frac{q}{n}}$$

$$\textcircled{\text{例}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 4 + \frac{2}{n}}{5 + \frac{1}{n}} = \infty$$

$$\textcircled{\text{例}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - 4n + 2}{5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n - 4 + \frac{2}{n}}{5 + \frac{1}{n}} = -\infty$$

$$\textcircled{\text{例}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{-5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 4 + \frac{2}{n}}{-5 + \frac{1}{n}} = -\infty$$

$$\textcircled{\text{例}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - 4n + 2}{-5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n - 4 + \frac{2}{n}}{-5 + \frac{1}{n}} = \infty$$

$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ ($\infty - \infty$ の不定形) を含む数列の極限

$n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow \infty$ とする.

$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ を含む不定形の数列の極限は有理化する.

⑧ $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}) = a_n - b_n$ を利用して根号をはずす.

$$\begin{aligned} \text{⑨ 例 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) \\ &= \sqrt{1+0} + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑩ 例 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

収束する2つの数列の極限値の大小関係

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について

十分大きな n に対し $a_n \leq b_n$ が成り立つとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \quad \text{ならば} \quad \alpha \leq \beta$$

⑧補 $n \rightarrow \infty$ とするので、小さい n は気にしなくてよい。

⑧補 「 $a_n \leq b_n$ 」を「 $a_n < b_n$ 」としても $\alpha < \beta$ になるとは限らない。

つまり「 $a_n < b_n$ ならば $\alpha < \beta$ 」は成り立たず「 $a_n < b_n$ ならば $\alpha = \beta$ 」の場合がある。

具体例をあげると $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$

つねに $a_n < b_n$ が成り立つが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

すなわち $\alpha = \beta$

⑧注 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束する場合に成り立つことなので、

「 $a_n \leq b_n$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 」としないこと。

追い出しの原理

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について

十分大きな n に対し $a_n \leq b_n$ が成り立つとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

⑧補 「追い出しの原理」の言い方は教科書には書かれていない。

⑧補 小さい方が正の無限大に発散するので、追い出されて大きい方も正の無限大に発散する。

⑧補 「原理」と呼ぶのは高校の範囲では証明ができない定理だからで、とりあえず認めて先に進むという配慮である。

⑧例 十分大きな n に対して $n^2 \leq b_n$ が成り立つならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

はさみうちの原理

3つの数列 $\{a_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ について

十分大きな n に対し $x_n \leq a_n \leq y_n$ が成り立つとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

⑧ 教科書には「はさみうちの原理」ということがあるとかかれている。

⑨ 同じ極限值をもつ数列にはさまれた数列は同じ極限值をもつ。

⑩ $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{3} \leq 1$ が成り立つので、各辺に $\frac{1}{n}$ をかけて

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \leq \frac{1}{n}$$

ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

であるから、はさみうちの原理を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} = 0$

絶対値と極限 I

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について

十分大きな n に対し $|a_n| \leq b_n$ が成り立つとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

⑪ $0 \leq |a_n| \leq b_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ならば、はさみうちの原理を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

⑫ $\left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \right| \leq \frac{1}{n}$ が成り立ち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \right| = 0$

☆絶対値と極限 II

数列 $\{a_n\}$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

⑬ $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ が成り立ち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-|a_n|) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

はさみうちの原理を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

⑭ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \right| = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} = 0$

等比数列 $\{r^n\}$ の極限

r を定数とする. 公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} r > 1 & \text{のとき} & \infty \\ r = 1 & \text{のとき} & 1 \\ |r| < 1 & \text{のとき} & 0 \\ r = -1 & \text{のとき} & \pm 1 \text{ (振動)} \\ r < -1 & \text{のとき} & \pm \infty \text{ (振動)} \end{cases}$$

とくに 数列 $\{r^n\}$ が収束する $\iff -1 < r \leq 1$

⑨ 例 $r = 2, 1, \frac{1}{2}, -1, -2$ について

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n &= \infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n &= 1, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n &= \begin{cases} -1 & (n \text{ が奇数}) \\ 1 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}, & \lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n &= \begin{cases} -\infty & (n \text{ が奇数}) \\ \infty & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

⑩ 考 $r > 1$ のとき

$$r = 1 + h \text{ かつ } h > 0 \text{ となる } h \text{ が存在し } r^n = (1 + h)^n$$

十分大きな n に対して

$$\begin{aligned} (1 + h)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n \quad (\because \text{二項定理}) \\ &> {}_nC_1 h \quad (\because {}_nC_0 + {}_nC_2 h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n > 0) \\ &= nh \end{aligned}$$

$$\therefore r^n > hn$$

$$\text{ここで } \lim_{n \rightarrow \infty} hn = \infty$$

$$\text{追い出しの原理を用いて } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

⑪ あ $r = 0$ のとき

$$r^n = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

⑫ い $0 < |r| < 1$ のとき

$$r = \pm \frac{1}{s} \text{ かつ } s > 1 \text{ となる } s \text{ が存在し } \lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$$

$$\text{ここで } \lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s^n} = 0$$

$$\text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

⑬ あ, い より $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

数列 $\{a^n - b^n\}$ ($\infty - \infty$ の不定形) の極限

a, b を相異なる 1 より大きい定数とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n - b^n) = \begin{cases} \infty & (a > b > 1) \\ -\infty & (1 < a < b) \end{cases}$$

① $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^n) = \infty$

これは、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 3^n は 2^n に比べて速く大きくなるということである。

一般的に r^n ($r > 1$) は底 r が大きければ大きいほど、速く大きくなる。

2^n は 3^n に比べて小さすぎるので、極限に影響しない。

3^n の項が極限に最も影響を与えることから、 3^n に着目して変形するとよい。

直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $3^n - 2^n \asymp 3^n$ 」

基本的には、極限に最も影響を与える項でくくって、次のように変形する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = \infty$$

「 $|r| < 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 」を利用するように変形することが基本である。

② $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right\} = -\infty$

③ $a > b > 1$ のとき

直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $a^n - b^n \asymp a^n$ 」

$0 < \frac{b}{a} < 1$ であることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n - b^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^n \right\} = \infty$$

④ $1 < a < b$ のとき

直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $a^n - b^n \asymp -b^n$ 」

$0 < \frac{a}{b} < 1$ であることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n - b^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b^n \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^n - 1 \right\} = -\infty$$

数列 $\left\{ \frac{k \cdot a^n + \ell \cdot b^n}{p \cdot a^n + q \cdot b^n} \right\}$ の極限

k, ℓ, p, q を 0 でない定数, a, b はともに 1 以外の定数で, $|a| \neq |b|$ とする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^n + \ell \cdot b^n}{p \cdot a^n + q \cdot b^n} = \begin{cases} \frac{k}{p} & (|a| > |b|) \\ \frac{\ell}{q} & (|a| < |b|) \end{cases}$$

⑧ $|a| > |b|$ のとき

$$0 < \left| \frac{b}{a} \right| < 1$$

a^n と b^n のうち, 極限にもっとも影響するのは a^n であることから

直感的に「 $n \rightarrow \infty$ のとき $k \cdot a^n + \ell \cdot b^n \asymp k \cdot a^n$, $p \cdot a^n + q \cdot b^n \asymp p \cdot a^n$ 」

これより $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{k \cdot a^n + \ell \cdot b^n}{p \cdot a^n + q \cdot b^n} \asymp \frac{k \cdot a^n}{p \cdot a^n} = \frac{k}{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^n + \ell \cdot b^n}{p \cdot a^n + q \cdot b^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^n \left\{ 1 + \frac{\ell}{k} \left(\frac{b}{a} \right)^n \right\}}{p \cdot a^n \left\{ 1 + \frac{q}{p} \left(\frac{b}{a} \right)^n \right\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{p} \cdot \frac{1 + \frac{\ell}{k} \left(\frac{b}{a} \right)^n}{1 + \frac{q}{p} \left(\frac{b}{a} \right)^n} \\ &= \frac{k}{p} \end{aligned}$$

⑨ 分数の極限は分母と分子の極限にもっとも影響する項の比からわかる.

下の ⑩ のように変形することもできる.

⑩ (分母と分子を a^n でわる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot a^n + \ell \cdot b^n}{p \cdot a^n + q \cdot b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k + \ell \left(\frac{b}{a} \right)^n}{p + q \left(\frac{b}{a} \right)^n} = \frac{k}{p}$$

⑪ $|a| < |b|$ のときも上と同様である.

$$\textcircled{\text{例}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}{5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n}{5 + 7 \left(\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{4}{5}$$

$$\textcircled{\text{例}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n}{5 \cdot 3^n + 7 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 3}{5 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 7} = \frac{3}{7}$$

$$\textcircled{\text{例}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (-3)^n + 3 \cdot 2^n}{5 \cdot (-3)^n + 7 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \left(-\frac{2}{3} \right)^n}{5 + 7 \left(-\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{4}{5} \quad \leftarrow |-3| > |2|$$

★数列 $\{nr^n\}$ の極限

r を定数とする. 無限数列 $\{nr^n\}$ の極限について

$$|r| < 1 \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$$

⑨ 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$

⑩ 考 ① $r = 0$ のとき

$$nr^n = 0 \quad \text{なので} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$$

② $0 < |r| < 1$ のとき

$$r = \pm \frac{1}{s} \quad \text{かつ} \quad s > 1 \quad \text{となる} \quad s \text{ が存在し} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$$

$$s = 1 + h \quad \text{かつ} \quad h > 0 \quad \text{となる} \quad h \text{ が存在し} \quad s^n = (1 + h)^n$$

十分大きな n に対して

$$(1 + h)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + {}_nC_3 h^3 + \cdots + {}_nC_n h^n \quad (\because \text{二項定理})$$

$$> {}_nC_2 h^2 \quad (\because {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_3 h^3 + \cdots + {}_nC_n h^n > 0)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

$$\therefore s^n > \frac{h^2}{2} n(n-1)$$

$$\text{これより} \quad 0 < |nr^n| = \frac{n}{s^n} < \frac{n}{\frac{h^2}{2} n(n-1)} < \frac{2}{h^2(n-1)}$$

$$\text{ここで} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{h^2(n-1)} = 0$$

$$\text{はさみうちの原理を用いて} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |nr^n| = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$$

③, ② より $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$

★部分列

無限数列 $\{a_n\}$ について

自然数の列 $k(1), k(2), k(3), \dots$ ただし $k(1) < k(2) < k(3) < \dots$

を用いた 数列 $\{a_{k(m)}\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)

つまり 無限数列 $\{a_n\}$ の項のうちから, 順番を変えずに並べた無限数列を
数列 $\{a_n\}$ の部分列 または 部分数列 という.

数列 $\{a_n\}$ 自身も部分列であるとする.

⑧ 無限数列 $\{a_n\}$ の項 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ のうちから n が偶数の項だけ並べて
 $a_2, a_4, a_6, \dots$ となる項は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.

つまり $b_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) として 数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.

⑨ 順番を変えて $a_2, a_6, a_4, \dots$ としたようなものは部分列ではない.

★数列の極限と部分列の極限 I

無限数列 $\{a_n\}$ とその部分列 $\{b_n\}$ について

① 無限数列 $\{a_n\}$ が α に収束するならば その部分列 $\{b_n\}$ も α に収束する.

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

② 無限数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するならば その部分列 $\{b_n\}$ も

正の無限大に発散する.

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

例 ① $a_n = \frac{1}{n}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$b_n = a_{2m} = \frac{1}{2m}$ とすると, 数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.

$n \rightarrow \infty$ ならば $m \rightarrow \infty$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} = 0$

② $a_n = n^2$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

$b_n = a_{2m} = (2m)^2 = 4m^2$ とすると, 数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.

$n \rightarrow \infty$ ならば $m \rightarrow \infty$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} 4m^2 = \infty$

注 逆は成り立たない. (数列の極限と部分列の極限 II を参照)

★数列の極限と部分列の極限 II

無限数列 $\{a_n\}$ とその部分列 $\{b_n\}$ について

部分列 $\{b_n\}$ が α に収束するならば 数列 $\{a_n\}$ が α に収束する とは限らない.

つまり

部分列 $\{b_n\}$ が α に収束するが 数列 $\{a_n\}$ が α に収束しない場合がある.

考 $a_n = (-1)^n$ について,

$b_n = a_{2m} = (-1)^{2m}$ とすると, 数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.

$n \rightarrow \infty$ ならば $m \rightarrow \infty$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{2m} = 1$

ところが $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ は ± 1 の振動で収束しない.

★数列の極限と部分列の極限Ⅲ

無限数列 $\{a_n\}$ について

p を 2 以上の整数とし, n を p で割ったときの余りが $1, 2, \dots, p-1, 0$

となる項をそれぞれ並べた部分列

$$\{a_{p(m-1)+1}\}, \{a_{p(m-1)+2}\}, \dots, \{a_{pm-1}\}, \{a_{pm}\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

がすべて α に収束するならば 数列 $\{a_n\}$ も α に収束する.

つまり

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{p(m-1)+1} = \alpha \\ \lim_{m \rightarrow \infty} a_{p(m-1)+2} = \alpha \\ \vdots \\ \lim_{m \rightarrow \infty} a_{pm-1} = \alpha \\ \lim_{m \rightarrow \infty} a_{pm} = \alpha \end{array} \right. \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

⑧ 数列 $\{a_n\}$ の n を p で割った余りで分類した部分列を考えて,
それがすべて同じ値 α に収束する場合に限り, 数列 $\{a_n\}$ は α に収束する.

⑨ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m-1} = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m} = \alpha \end{array} \right. \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

⑩ 部分列が違う値に収束する場合は数列 $\{a_n\}$ は収束しない.

たとえば, $\alpha \neq \beta$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m-1} = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m} = \beta \end{array} \right. \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \alpha & (n \text{ は奇数}) \\ \beta & (n \text{ は偶数}) \end{cases} \quad \text{という誤答をしないこと.}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は α, β の振動で収束しない.

⑪ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3m-2} = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3m-1} = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3m} = \alpha \end{array} \right. \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

⑫ $m \rightarrow \infty$ とするので $m = 1, 2$ など小さい m は気にしなくてよい.

だから n を 3 で割ったときの余りが 1 の部分列 $\{a_{3m-2}\}$ は $\{a_{3m+1}\}$ でもよい.

つまり, 次のようにしてもよい.

⑬ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3m+1} = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3m-1} = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3m} = \alpha \end{array} \right. \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

漸化式と数列の極限

数列 $\{a_n\}$ の漸化式があるもとで $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求める方法に次がある.

- ① 漸化式を解いて数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める.
- ② 不等式を利用して求める. ← 「はさみうちの原理」などを利用

④ ① 漸化式から一般項を直接求めて, 極限を求める.

$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のもとで $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求める.

変形して $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

数列 $\{a_n - 2\}$ は第1項 $a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

すなわち $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \right\} = 2$

⑤ ② 漸化式が解けない場合は, 不等式を利用して「はさみうちの原理」などを利用する.

漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ を変形して求める極限の求め方もある.

不等式の漸化式 $A_{n+1} \leq r A_n$ の変形

数列 $\{A_n\}$ の漸化式

$$A_{n+1} \leq r A_n \quad (r \text{ は } n \text{ に無関係な定数}) \quad \text{ただし } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

について, これをくり返して

$$A_n \leq r A_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$\leq r^2 A_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$\leq r^3 A_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$\vdots$$

$$\leq r^{n-3} A_3 \quad (n \geq 3)$$

$$\leq r^{n-2} A_2 \quad (n \geq 2)$$

$$\leq r^{n-1} A_1 \quad (n \geq 1)$$

$$\leq r^n A_0 \quad (n \geq 0)$$

つまり $A_n \leq r^{\circ} A_{\square}$ (たしたら n)
($\circ + \square = n$)

⑨ $a_{n+1} \leq 5a_n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) が成り立つとき

$$a_n \leq 5a_{n-1}$$

$$\leq 5^2 a_{n-2}$$

$$\leq 5^3 a_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\leq 5^{n-3} a_3$$

$$\leq 5^{n-2} a_2$$

$$\leq 5^{n-1} a_1$$

$$\leq 5^n a_0$$

すなわち $a_n \leq 5^n a_0$ が成り立つ.

漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ を変形して求める極限

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ のもとで $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

つまり無限数列 $\{a_n\}$ の極限值 α を求める方法に次の手順がある.

① $\alpha = f(\alpha)$ を満たすことが必要であることから α を推測する.

② 十分大きな n に対して

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq r |a_n - \alpha| \quad \text{かつ} \quad 0 < r < 1$$

となる r を 1 つ求める.

③ ② を繰り返し用いて $|a_n - \alpha| \leq r^{n-1} |a_1 - \alpha|$

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} |a_1 - \alpha| = 0$ であるから ③ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

補 絶対値記号を外して考えてもよい. 入試では誘導問題になることが多い.

補 ③ の変形は 不等式の漸化式 $A_{n+1} \leq r A_n$ の変形 を利用する.

また, 極限では 絶対値と極限Ⅰ, 絶対値と極限Ⅱ を用いる.

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ のもとで $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求める.

① $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ として $\alpha \geq 0$ のもとで両辺を 2 乗して
 $\alpha^2 = \alpha + 2$ すなわち $(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0 \quad \therefore \alpha = 2$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ と推測できる.

$$\begin{aligned} \text{②} \quad |a_{n+1} - 2| &= |\sqrt{a_n + 2} - 2| = \left| \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |a_n - 2| \quad (\because \sqrt{a_n + 2} \geq 0) \end{aligned}$$

③ これを繰り返し用いて $|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 2| = 0$
 よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

無限級数

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ の各項を順に $+$ の記号で結んで得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

を むげんきゅうすう無限級数 といい a_1 を無限級数の初項, a_n を無限級数の第 n 項 という.

この無限級数を記号 $\sum$ を用いて $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き表すことがある.

すなわち
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

⑨ 「級数」は「たし算」を意味する.

つまり, 「無限級数」は「無限のたし算」を意味する.

無限級数の部分和

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

において 初項から第 n 項の和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

を この無限級数の 第 n 項までの ぶぶんわ部分和 という.

⑨ 無限個たすものの初項から第 n 項までの和

⑨ $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

⑨ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

において, 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

無限級数の和

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

において 第 n 項までの部分和を S_n とする.

① 数列 $\{S_n\}$ が S に収束する

つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ であるとき

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に収束するといい, S を 無限級数の和 という.

このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \text{または} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書く.

② 数列 $\{S_n\}$ が発散するとき 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は 発散する という.

⑧ 無限個たすのはキリがなく不可能だから, 第 n 項までの部分和の極限で無限個たしたことにするという感じ.

例 ① 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

において, 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

よって, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ は収束し, 和は 1 である.

例 ② 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$

において, 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

よって, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ は発散する. (和は定まらない)

収束する2つの無限級数と和

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して その和をそれぞれ S , T とする.

つまり $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ とするとき, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad k \text{ を定数として } \sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k S$$

$$\boxed{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$$

$$\boxed{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ をまとめて 実数 p , q に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p a_n + q b_n) = p S + q T$$

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3$ とする.

$$\boxed{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 5 a_n = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\boxed{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 2 + 3 = 5$$

$$\boxed{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 2 - 3 = -1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5 a_n + 6 b_n) = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 28$$

無限等比級数の和

初項が a 、公比が r の無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

について

① $a = 0$ のとき 収束し、その和は 0

② $a \neq 0$ のとき

$|r| < 1$ ならば収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$ すなわち $\frac{(\text{初項})}{1-(\text{公比})}$

$|r| \geq 1$ ならば発散する

とくに $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束する $\iff a = 0$ または $|r| < 1$

⑨ 補 等比数列の無限級数を考えている。

和は初項と公比のみで求まる。

⑩ 考 第 n 項までの部分和を S_n とおくと

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

① $a = 0$ のとき

$$S_n = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

すなわち $a = 0$ のとき収束し、和は 0

② $a \neq 0$ のとき

① $r = 1$ ならば $S_n = a + a + a + \cdots + a = an$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} an$ は発散する。

② $r \neq 1$ ならば $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散する} & (r \leq -1, 1 < r) \end{cases}$$

①, ② より $|r| < 1$ のとき収束し、和は $\frac{a}{1-r}$

⑪ 例 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$

これは初項 1、公比 $\frac{1}{2}$ ($\left|\frac{1}{2}\right| < 1$) の無限等比級数であるから収束し、和は

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

無限級数の収束・発散 I

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について、次の命題が成り立つ.

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

② 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

④ ① 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば

$$\text{第 } n \text{ 項までの部分和を } S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \text{ 和を } S \text{ として } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

$$\text{ここで } n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

② ① が真なのでその対偶命題も真となる.

⑤ ② が成り立つので

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないならば、部分和を求めなくても 発散 することがわかる.

⑥ $a_n = \frac{n}{n+1}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないので $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ は発散する.

⑦ 逆は成り立たない (無限級数の収束・発散 II で示す)

無限級数の収束・発散Ⅱ

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するは成り立つとは限らない.

つまり

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であるが $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散する場合がある.

⑧ 無限級数の収束・発散Ⅰ の逆は成り立たないことを示している.

⑨ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ について, 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

よって, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.