

「新教育課程履修者」は、選択できません。

旧数学 I ・ 旧数学 A

問 題	選 択 方 法
第 1 問	必 答
第 2 問	必 答
第 3 問	いずれか 2 問を選択し、 解答しなさい。
第 4 問	
第 5 問	

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 a, b を実数とする。 x についての方程式

$$(2a + 4b - 2)x^2 + (5a + 11)x - b - 8 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。

(1) $a = 1$ とする。

b に着目すると、 $\textcircled{1}$ の左辺は

$$(4x^2 - 1)b + 16x - 8 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表せる。よって、 $\textcircled{2}$ を因数分解すると

$$(2x - 1) \left(\boxed{\text{ア}} bx + b + \boxed{\text{イ}} \right)$$

となる。したがって、 $x = \frac{1}{2}$ は $\textcircled{1}$ の解の一つであることがわかる。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(2) $b = 2$ とする。

(i) ① の左辺を因数分解すると

$$\left(\boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}} \right) \left\{ \left(a + \boxed{\text{オ}} \right)x - \boxed{\text{カ}} \right\}$$

となる。

(ii) $a = 2\sqrt{2}$ のとき、① の解は

$$x = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \quad \boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{2}$$

となる。

(iii) $a = -\boxed{\text{オ}}$ であることは、① の解が $x = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ だけであるた

めの $\boxed{\text{ケ}}$ 。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- ① 必要条件であるが、十分条件ではない
- ② 十分条件であるが、必要条件ではない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

(旧数学 I ・旧数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

[2] 図1のように、直線 l 上の点 A において l に接する半径 2 の円を円 O とし、 l 上の点 B において l に接する半径 4 の円を円 O' とする。円 O と O' は 2 点で交わるとし、その交点を P, Q とする。ただし、 $\angle APB < \angle AQB$ とする。さらに、 $\angle PAB$ は鋭角であるとする。このとき、 $\triangle PAB$ と $\triangle QAB$ について考えよう。

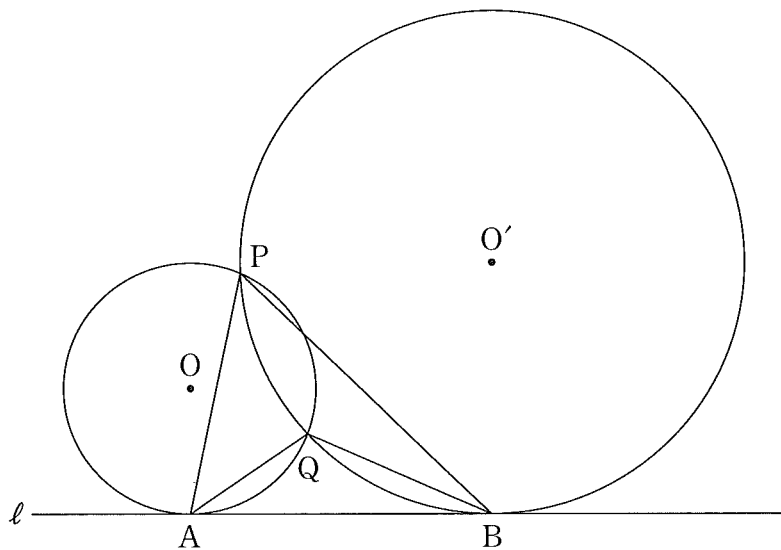


図 1

(1) $\angle PAB = \alpha$, $\angle PBA = \beta$ とおく。

円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とする。 $\angle OAB = 90^\circ$ であるから、 $\angle AOH = \alpha$ である。よって、 $\triangle OAH$ に着目すると、 $AH = \boxed{\text{コ}}$ $\sin \alpha$ であるから

$$PA = 2 AH = \boxed{\text{サ}} \sin \alpha \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

である。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

同様にして、円 O' の中心 O' から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H' とすると

$$PB = 2 BH' = \boxed{\text{シ}} \sin \beta \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

であることもわかる。

また、 $\triangle PAB$ の外接円の半径を R_1 とおくと、正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin \boxed{\text{ス}}} = \frac{PB}{\sin \boxed{\text{セ}}} = 2 R_1$$

が成り立つので

$$PA \sin \boxed{\text{セ}} = PB \sin \boxed{\text{ス}}$$

である。この式に、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を代入することにより

$$\sin \boxed{\text{セ}} = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} \sin \boxed{\text{ス}}$$

$$PB = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} PA$$

となることがわかる。さらに

$$R_1 = \boxed{\text{タ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$$

が得られる。

$\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

$\textcircled{0} \alpha$	$\textcircled{1} \beta$
--------------------------	-------------------------

(旧数学 I ・旧数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・ 旧数学 A

(2) 太郎さんと花子さんは、(1) の考察を振り返っている。

太郎：△QAB の外接円の半径も求められるかな。
 花子：(1) の R_1 の求め方を参考にすればよさそうだね。

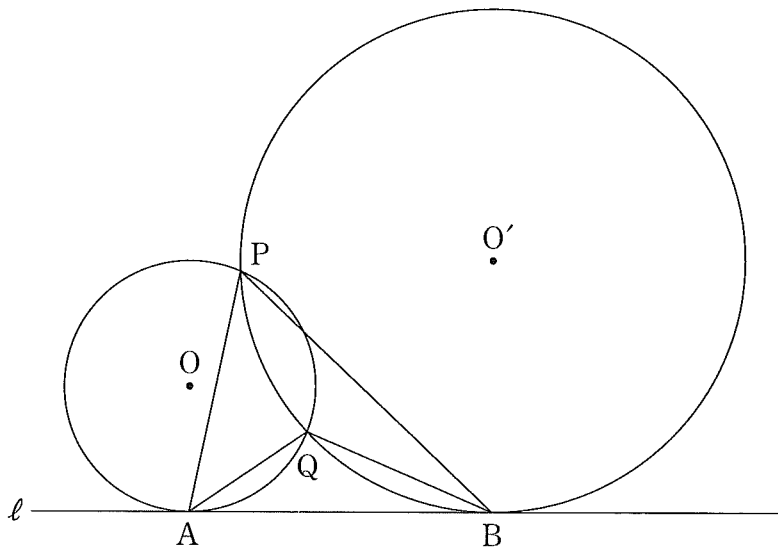


図 1 (再掲)

△PAB, △QAB の外接円の半径をそれぞれ R_1, R_2 とおく。このとき、
 R_1 R_2 である。さらに、 $\sin \angle APB$ $\sin \angle AQB$ であることも
 わかる。

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① < ② = ③ >

(旧数学 I ・ 旧数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

- (3) 太郎さんと花子さんは、これまでの考察をもとに、 $\triangle PAB$ と $\triangle QAB$ の辺の長さについて考えている。

太郎：AB の長さが与えられれば、PA と QA の長さが求められそうですね。

花子： $\angle APB < \angle AQB$ に注意して求めてみようよ。

$AB = 2\sqrt{7}$ とする。このとき

$$\sin \angle APB = \frac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{=}}$$

である。(1) より、 $PB = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ PA であるから

$$PA = \sqrt{\boxed{\text{ヌネ}}}$$

である。

同様に、 $QA = \sqrt{7}$ であることがわかる。

旧数学 I ・旧数学 A

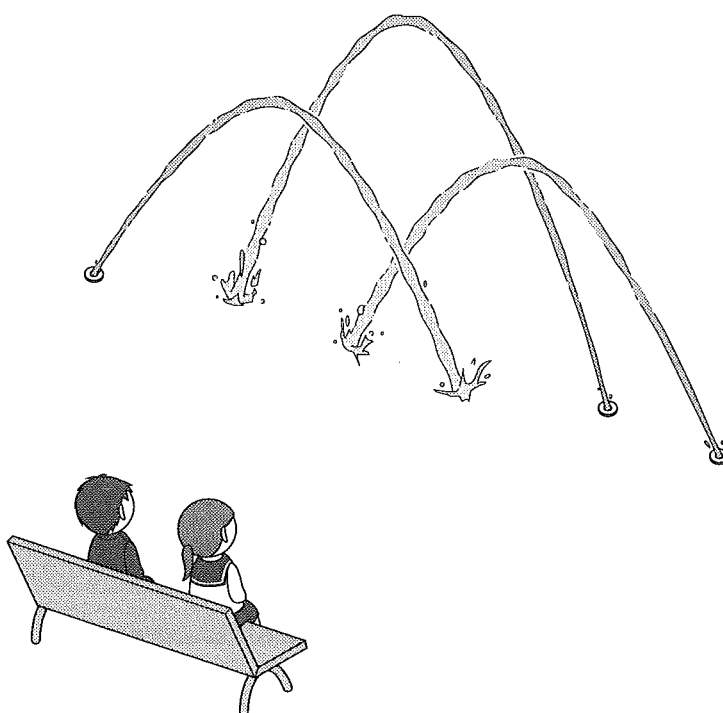
第 2 問 (必答問題) (配点 30)

- 〔1〕 花子さんと太郎さんは、公園にある二つの小さな噴水と一つの大きな噴水の高さについて話している。

花子：あの中央の大きな噴水の高さは何メートルだろう。

太郎：実際に高さを測定するのは難しそうだね。噴水の水がえがく曲線は、放物線になると聞いたことがあるよ。

花子：じゃあ、放物線と仮定して、およその高さを考えてみよう。



参考図

(旧数学 I ・旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

花子さんと太郎さんは、噴水の高さについて次のように考えることにした。

噴水の水がえがく曲線は三つとも放物線とする。三つの噴水の水が出る位置は水平な地面にある。図 1 のように座標軸が定められた平面上に、三つの噴水を正面から見た図をかく。左右の小さな噴水の水がえがく放物線については後の仮定 1 を、中央の大きな噴水の水がえがく放物線については後の仮定 2 を設定する。図 1 の P_1 , P_2 , P_3 は噴水の水が出る位置である。なお、長さの単位はメートルであるが、以下では省略する。

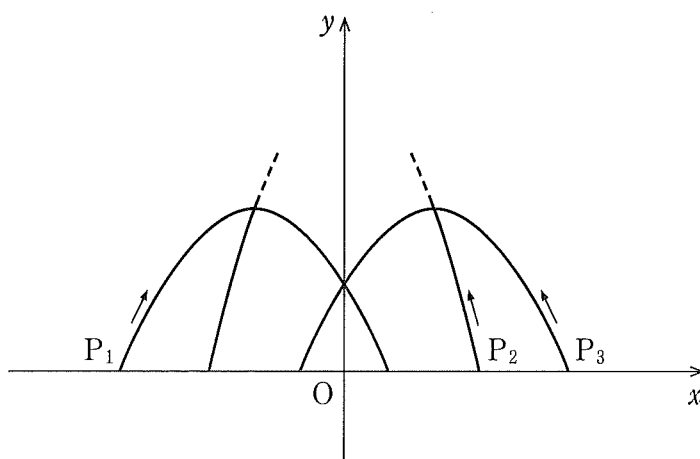


図 1

(旧数学 I ・旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・ 旧数学 A

仮定 1

- 左側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_1 は, x 軸上の点 $P_1\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ から出て点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ に至る。
- 右側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_3 は, x 軸上の点 $P_3\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ から出て点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ に至る。
- C_1 と C_3 はともに点 $(0, 1)$ を通る。

仮定 2

- 中央の大きな噴水の水がえがく放物線 C_2 は, x 軸上の点 $P_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。

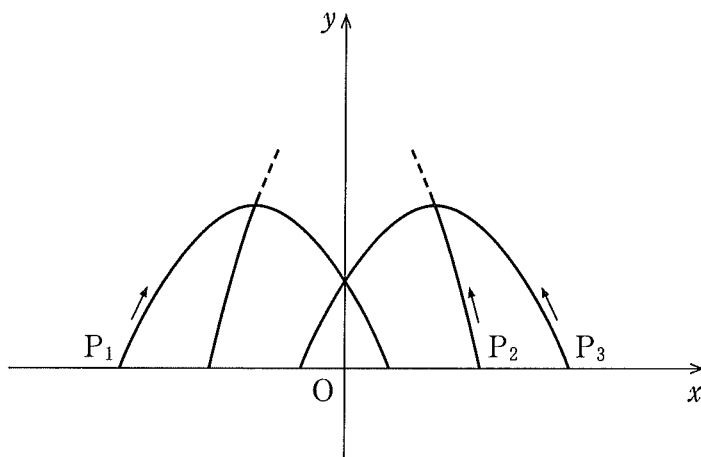


図 1 (再掲)

(旧数学 I ・ 旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(1) 仮定1と仮定2のもとで考える。 C_1 をグラフにもつ2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。このとき $c = \boxed{\text{ア}}$ であり、また

$$y = -\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^2 - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x + \boxed{\text{ア}}$$

である。

C_1 の頂点の y 座標は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。このことを用いると、 C_2 の頂点

の y 座標は $\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ であることがわかる。

したがって、大きな噴水の高さは、小さな噴水の高さの $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ については、最も適当なものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

① およそ2倍

② およそ3倍

③ およそ4倍

④ およそ5倍

(旧数学 I ・旧数学 A 第2問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(2) 花子さんと太郎さんは、大きな噴水の高さについて話している。

花子：正面から見たとき、大きな噴水が小さな噴水の頂点を通って見えるというデザインは変えずに、大きな噴水の高さを変えることはできるのかな。

太郎：左右の二つの小さな噴水は変えずに、大きな噴水の水が出る位置を変えてみたらどうかな。

花子：大きな噴水の高さが 5 メートルになるときの水が出る位置を考えてみよう。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・ 旧数学 A

仮定 2 の代わりに次の仮定 2' をおく。

仮定 2'

- 中央の大きな噴水の水がえがく放物線 C_2' は、 x 軸の正の部分の点 P_2' から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。
- C_2' の頂点の y 座標は 5 である。

仮定 1 と仮定 2' のもとで考える。このとき、 P_2' は P_2 より

ス
セ

だけ

ソ

 の方にある。

ソ

 の解答群

㉔ P_1

① P_3

(旧数学 I ・ 旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

〔2〕 太郎さんと花子さんは、社会生活基本調査の集計結果に、「睡眠」、「食事」、「通勤・通学」、「移動(通勤・通学を除く)」などの 20 種類の行動それぞれについての総平均時間と行動者平均時間が、47 都道府県別に集計されていることを知った。

用語の説明

- 総平均時間……ある行動に費やした時間の調査対象者全員についての平均値(分)
- 行動者平均時間……ある行動に費やした時間の調査対象者全員から、その行動に費やした時間が 0 分の人を除いた調査対象者についての平均値(分)

例えば、「通勤・通学」に費やした時間(分)が

$$75, 0, 90, 60, 0$$

であったとき、これらの平均値 $\frac{75 + 0 + 90 + 60 + 0}{5} = 45$ が総平均時間で

あり、値が 0 である二つを除いた 75, 90, 60 の平均値 $\frac{75 + 90 + 60}{3} = 75$ が

行動者平均時間である。

ここでは、平日における 15 歳以上を対象とした集計結果を用いて、都道府県ごとに値を算出している。

なお、以下の図や表については、総務省の Web ページをもとに作成している。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

- (1) 太郎さんと花子さんは、「通勤・通学」に費やした時間について調べることにした。図 1 と図 2 はそれぞれ、令和 3 年の「通勤・通学」の総平均時間と行動者平均時間のデータをヒストグラムに表したものである。以下、ヒストグラムの各階級の区間は、左側の数値を含み、右側の数値を含まない。

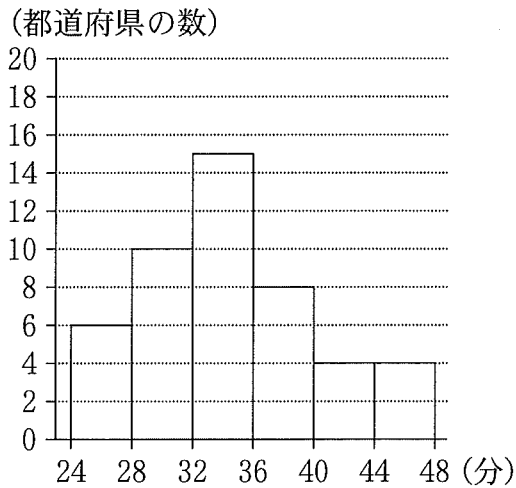


図 1 令和 3 年の「通勤・通学」の総平均時間のヒストグラム

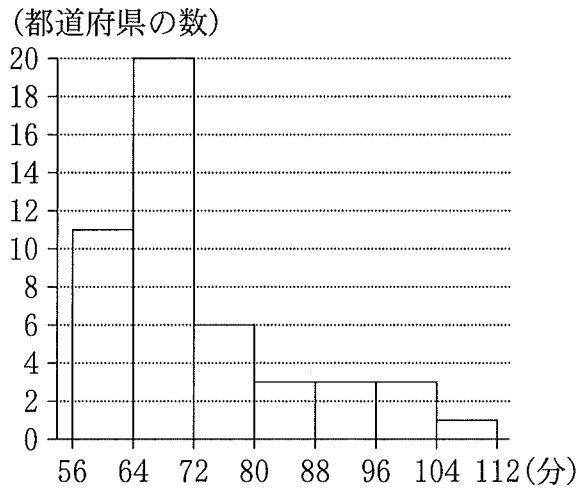


図 2 令和 3 年の「通勤・通学」の行動者平均時間のヒストグラム

- (i) 図 1 から、令和 3 年の「通勤・通学」の総平均時間の最頻値は タチ であり、同様に図 2 から、行動者平均時間の最頻値は ツテ である。
- (ii) 図 1 のヒストグラムに関して、各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定する。このとき、令和 3 年の「通勤・通学」の総平均時間の平均値を m とすると

$$\text{トナ} \leq m < \text{トナ} + 1$$

である。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・ 旧数学 A

(iii) 次に、太郎さんと花子さんは、平成 28 年と令和 3 年の「通勤・通学」に費やした時間を比較することにした。

図 3 は、平成 28 年の総平均時間、令和 3 年の総平均時間、平成 28 年の行動者平均時間、令和 3 年の行動者平均時間の箱ひげ図を並べたものである。

ここで、あるデータにおける最大値から第 3 四分位数を引いた値を H とする。そして平成 28 年の総平均時間、令和 3 年の総平均時間、平成 28 年の行動者平均時間、令和 3 年の行動者平均時間における H を、それぞれ H_1, H_2, H_3, H_4 とする。

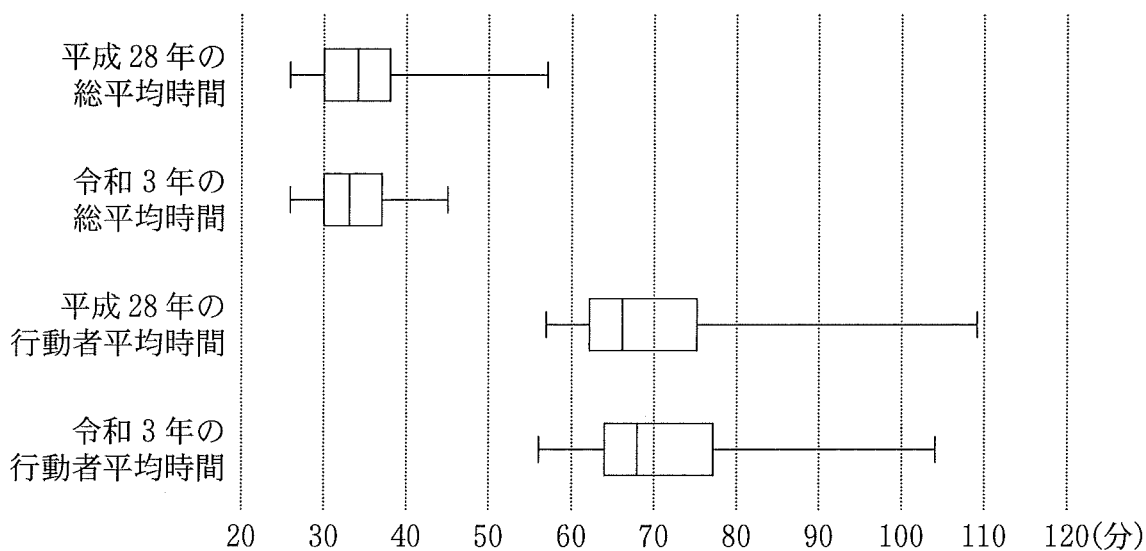


図 3 平成 28 年と令和 3 年の「通勤・通学」の総平均時間と行動者平均時間の箱ひげ図

(旧数学 I ・ 旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

次の (a), (b), (c) は、図 3 に関する記述である。

- (a) 令和 3 年の総平均時間の最大値は、令和 3 年の行動者平均時間の最小値より小さい。
- (b) 平成 28 年の総平均時間の四分位範囲は、平成 28 年の行動者平均時間の四分位範囲より小さい。
- (c) 総平均時間と行動者平均時間それぞれの、平成 28 年と令和 3 年の H の変化を比較すると、 $\frac{H_2}{H_1} > \frac{H_4}{H_3}$ となる。

(a), (b), (c) の正誤の組合せとして正しいものは である。

の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	正	正	正	正	誤	誤	誤
(b)	正	正	誤	誤	正	正	誤
(c)	正	誤	正	誤	正	誤	正

(旧数学 I ・旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・ 旧数学 A

- (2) 太郎さんと花子さんは、令和 3 年における「通勤・通学」と「移動(通勤・通学を除く)」(以下、「移動」)に関し、それぞれの行動に費やした総平均時間と行動者平均時間の関係について話をしている。

太郎：通勤の途中で、ふだんの経路を大きくはずれて買い物に行ったり病院に行ったりする人もいるけど、こうした行動は「通勤・通学」ではなく、「移動」になるね。「通勤・通学」に費やした時間が長いほど、「移動」に費やした時間は長いのかな。

花子：じゃあ、それぞれに費やした時間の関係を調べてみようよ。

図 4 と図 5 は「通勤・通学」と「移動」の総平均時間と行動者平均時間の散布図であり、図中の黒丸は、二つの点が完全に重なっていることを表している。なお、三つ以上の点が完全に重なっていることはない。ただし、図 4 と図 5 において、同じアルファベットを付している点は、同じ都道府県であることを表している。

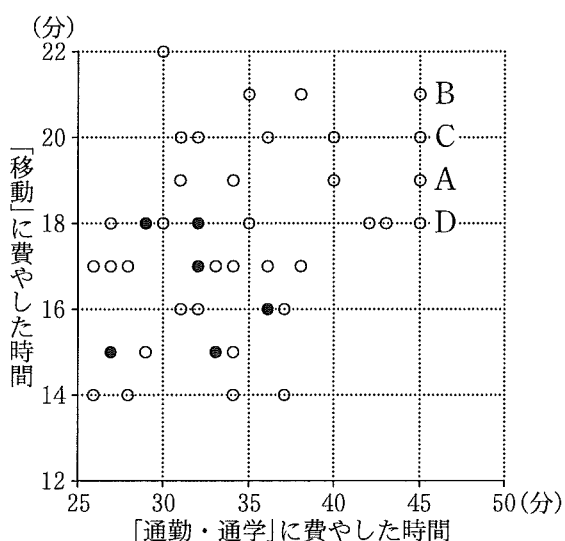


図 4 「通勤・通学」と「移動」の総平均時間の散布図

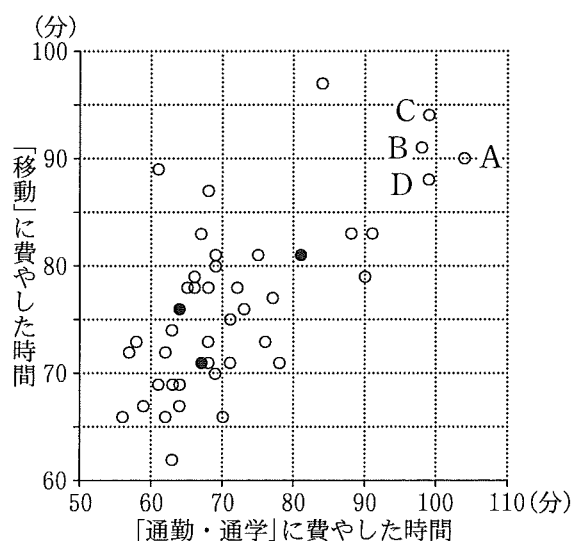


図 5 「通勤・通学」と「移動」の行動者平均時間の散布図

(旧数学 I ・ 旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

- (i) 図 5 から、「通勤・通学」の行動者平均時間が 60 以下で、かつ「移動」の行動者平均時間が 75 以下である都道府県は である。
- (ii) 図 4 における四つの点 A, B, C, D が表す都道府県では、「通勤・通学」の総平均時間が同じ値であるが、図 5 では「通勤・通学」の行動者平均時間について、点 A が表す都道府県の値は他の三つのどの都道府県の値よりも大きくなっていることがわかる。このようになるのは、 からである。

については、最も適当なものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 点 A が表す都道府県の「通勤・通学」に費やした時間が 0 である人数の割合が、他の三つのどの都道府県の割合よりも大きい
- ② 点 A が表す都道府県の「通勤・通学」に費やした時間が 0 である人数の割合が、他の三つのどの都道府県の割合よりも小さい
- ③ 点 A が表す都道府県の「移動」に費やした時間が 0 である人数の割合が、他の三つのどの都道府県の割合よりも大きい
- ④ 点 A が表す都道府県の「移動」に費やした時間が 0 である人数の割合が、他の三つのどの都道府県の割合よりも小さい

(旧数学 I ・旧数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・ 旧数学 A

(iii) 太郎さんと花子さんは、総平均時間と行動者平均時間のそれぞれの相関関係について調べることにした。

「通勤・通学」と「移動」の総平均時間の相関係数は 0.36 であった。「通勤・通学」と「移動」の行動者平均時間の相関係数を計算するために、表 1 のように平均値、標準偏差および共分散を求めた。

表 1 「通勤・通学」と「移動」の行動者平均時間の平均値、標準偏差、共分散

	平均値	標準偏差	共分散
「通勤・通学」の行動者平均時間	71.8	11.8	64.4
「移動」の行動者平均時間	76.6	7.9	

表 1 を用いると、「通勤・通学」と「移動」の行動者平均時間の相関係数は

である。

については、最も適当なものを、次の①～⑦のうちから一つ選べ。

① 0.01	② 0.21	③ 0.43	④ 0.58
⑤ 0.69	⑥ 0.78	⑦ 1.02	⑧ 1.45

第 3 問 (選択問題) (配点 20)

じゃんけんは、複数人でグー、チョキ、パーの 3 種類の手のいずれかを同時に出して勝敗を決めるゲームである。グーを出した人はチョキを出した人に勝ちパーを出した人に負け、チョキを出した人はパーを出した人に勝ちグーを出した人に負け、パーを出した人はグーを出した人に勝ちチョキを出した人に負ける。出された手が 2 種類の場合は勝敗が決まる。全員の手がすべて同じか、または 3 種類の手がすべて出ると、勝敗が決まらず、これをあいこという。

以下では、各人が、グーを出す確率、チョキを出す確率、パーを出す確率はどれも $\frac{1}{3}$ であるとする。

二人もしくは三人で次のルール 1 に従ってじゃんけんを行う。

ルール 1

- じゃんけんを、最大で 3 回行う。ただし、あいこも 1 回と数える。
- 勝者が一人になった時点でじゃんけんは終わり、その一人を優勝者と呼ぶ。
- ある回で負けていない人は、次の回のじゃんけんに参加する。
- ある回で負けた人は、次の回以降のじゃんけんには参加しない。

(1) 二人でルール 1 に従ってじゃんけんを行う場合を考える。

(i) 1 回目であいこになる確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。したがって、1 回目で優勝

者が決まる確率は $1 - \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(ii) 2 回目で優勝者が決まる確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。

(iii) 3 回目で優勝者が決まる確率は $\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}$ である。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・ 旧数学 A

(2) 三人でルール 1 に従ってじゃんけんを行う場合を考える。また、人数の推移を次のように表すものとする。

人数の推移

- 1 回目で優勝者が決まる場合を、 $3 \rightarrow 1$ と表す。
- 2 回目のじゃんけんを行う人数が m 人で、かつ 2 回目で優勝者が決まる場合を、 $3 \rightarrow m \rightarrow 1$ と表す。
- 2 回目、3 回目において、じゃんけんを行う人数がそれぞれ m 人、 n 人で、かつ 3 回目で優勝者が決まる場合を、 $3 \rightarrow m \rightarrow n \rightarrow 1$ と表す。

(i) 1 回目で優勝者が決まる、つまり人数の推移が $3 \rightarrow 1$ となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(ii) 2 回目で優勝者が決まる場合、起こり得る人数の推移は $3 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ と $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ である。

- 人数の推移が $3 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ となるのは、1 回目であいこになり、かつ 2 回目で

優勝者が決まる場合である。1 回目であいこになる確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

したがって、人数の推移が $3 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \times \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ で

ある。

- 人数の推移が $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

以上から、2 回目で優勝者が決まる確率はこれらを足し合わせて求められる。

(iii) 3 回目で優勝者が決まる確率は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(旧数学 I ・ 旧数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

- (3) 三人でルール 1 に従ってじゃんけんを行う場合と、三人で次のルール 2 に従ってじゃんけんを行う場合に、優勝者が決まる確率がどれくらい異なるのかについて考えよう。

ルール 2

- じゃんけんを、最大で 3 回行う。ただし、あいこも 1 回と数える。
- 勝者が一人になった時点でじゃんけんは終わり、その一人を優勝者と呼ぶ。
- ある回で負けていない人は、次の回のじゃんけんに参加する。
- 1 回目で負けた人は、2 回目には参加しない。また、2 回目で優勝者が決まっていない場合、1 回目で負けた人は、3 回目に参加する。
- 2 回目で負けた人は、3 回目には参加しない。

- (i) 三人でルール 2 に従ってじゃんけんを行う場合を考える。3 回目で優勝者が決まる場合、2 回目、3 回目において、じゃんけんを行う人数をそれぞれ m 人、 n 人とする。このとき、起こり得る m 、 n の組 (m, n) として、次の ㉠～㉡のうち、正しいものは である。

の解答群

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| ㉠ (2, 2) と (2, 3) だけ | ㉠ (2, 2) と (3, 2) だけ |
| ㉡ (2, 2) と (3, 3) だけ | ㉡ (2, 3) と (3, 2) だけ |
| ㉢ (2, 3) と (3, 3) だけ | ㉢ (3, 2) と (3, 3) だけ |
| ㉣ (2, 2) と (2, 3) と (3, 2) だけ | ㉣ (2, 2) と (2, 3) と (3, 3) だけ |
| ㉤ (2, 2) と (3, 2) と (3, 3) だけ | ㉤ (2, 3) と (3, 2) と (3, 3) だけ |

(旧数学 I ・旧数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(ii) ルール 1 の方がルール 2 に比べて、優勝者が決まる確率は $\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ だけ

$\boxed{\text{ナ}}$ 。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

① 大きい

② 小さい

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

(1) 702 を素因数分解すると

$$702 = 2 \times 3^{\boxed{\text{ア}}} \times \boxed{\text{イウ}}$$

となる。702 の正の約数の個数は $\boxed{\text{エオ}}$ 個である。

(2) 不定方程式

$$9x - 23y = 1$$

の整数解のうち、 x が正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{\text{カキ}}, \quad y = \boxed{\text{ク}}$$

である。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(3) 太郎さんと花子さんは、次の二つの条件 (A), (B) を満たす正の整数 n について考えている。

- (A) n と 702 の最大公約数が 9 である。
(B) n を 23 で割った余りが 6 である。

(i) 二人は、条件 (A) について話をしている。

太郎：まず、条件 (A) を満たす n について考えてみようよ。
花子：条件 (A) から n は 9 で割り切れることがわかるね。
太郎：702 を 9 で割ると 78 になるね。
花子： n を 9 で割ったときの商と 78 との間にどのような関係があるかな。

条件 (A) より、 n はある正の整数 m を用いて、 $n = 9m$ と表されることがわかる。このとき、 m に関する記述として、次の①～③のうち、正しいものは である。

の解答群

- ① m は 78 の倍数である。
② m は 1 と 78 以外の 78 の約数である。
③ m と 78 の最大公約数は 1 である。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(ii) 二人は、次のように話している。

太郎：条件 (A) と条件 (B) をともに満たす n を求めるには、どうすればいいのかな。

花子： n は 9 の倍数であり、また 23 で割った余りが 6 であるから、不定方程式 $9x = 23y + 6$ の整数解を利用することができそうだね。

$x = \boxed{\text{カキ}}$, $y = \boxed{\text{ク}}$ が不定方程式 $9x = 23y + 6$ の整数解であることを用いると、不定方程式

$$9x = 23y + 6$$

のすべての整数解は、 k を整数として

$$x = \boxed{\text{カキ}} \times 6 + \boxed{\text{コサ}} k, \quad y = \boxed{\text{ク}} \times 6 + \boxed{\text{シ}} k$$

と表される。

(iii) (i) と (ii) より、条件 (A) と条件 (B) をともに満たす正の整数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{スセソ}}$ であることがわかる。

(旧数学 I ・旧数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(4) 次の命題 (a), (b), (c) の真偽の組合せとして正しいものは である。

(a) 702 との最大公約数が 9 であり、かつ 23 で割った余りが 4 である正の整数が存在する。

(b) 702 との最大公約数が 9 であり、かつ 24 で割った余りが 7 である正の整数が存在する。

(c) 702 との最大公約数が 9 であり、かつ 24 で割った余りが 6 である正の整数が存在する。

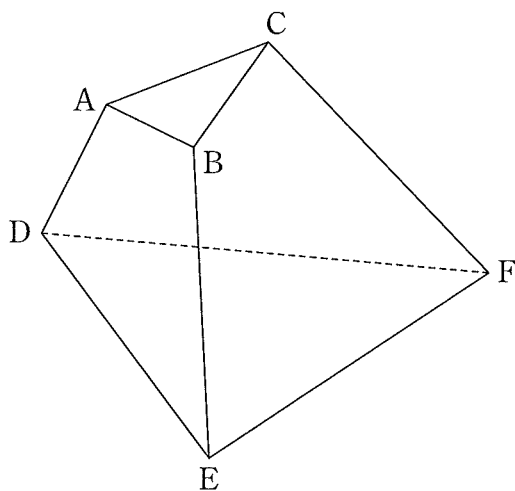
の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	真

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

6 点 A, B, C, D, E, F を頂点とし、三角形 ABC と DEF 、および四角形 $ABED, ACFD, BCFE$ を面とする五面体がある。ただし、直線 AD と BE は平行でないとする。

以下では、例えば、面 ABC を含む平面を平面 ABC 、面 $ABED$ を含む平面を平面 $ABED$ 、などということにする。



参考図

(旧数学 I ・旧数学 A 第 5 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(1) 3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わる。これを証明しよう。

直線 AD と BE は平面 ABED 上にあり、平行でないので 1 点で交わる。その交点を P とする。

点 P は直線 AD 上にあり、直線 AD は平面 ABED と平面 との交線であるから、点 P は平面 上にあることがわかる。

また、点 P は直線 BE 上にあり、直線 BE は平面 ABED と平面 との交線であるから、点 P は平面 上にあることがわかる。

平面 と平面 との交線は直線 CF であるから、点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。したがって、3 直線 AD, BE, CF は点 P で交わる。

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

㉔ ABC

① DEF

② ACFD

③ BCFE

(旧数学 I ・旧数学 A 第 5 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(2) 五面体において、面 ABC は一辺の長さが 3 の正三角形であり

$$AD = 7, \quad BE = 11, \quad CF = 17, \quad DE = 9$$

であるとする。また、6 点 A, B, C, D, E, F はある一つの球面上にあるとし、その球面を S とする。直線 AD と BE の交点を P とする。

(i) 平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり、4 点 A, B, E, D はその円周上にある。このことから、三角形 PAB と PED は相似であることがわかり、その相似比は 1 : である。したがって

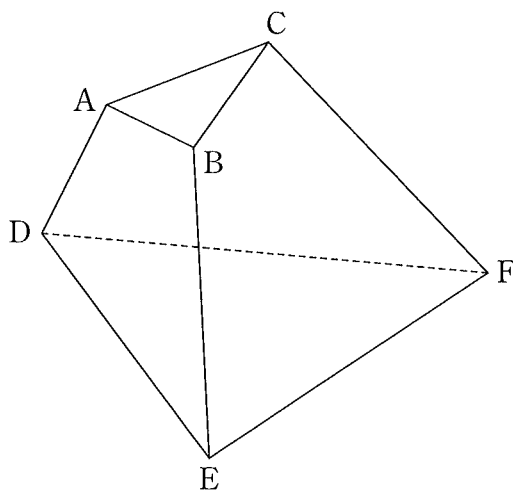
$$\text{ウ} \text{ PA} = \text{PB} + \text{エオ}$$

$$\text{ウ} \text{ PB} = \text{PA} + \text{カ}$$

が成り立つ。よって

$$\text{PA} = \text{キ}, \quad \text{PB} = \text{ク}$$

となる。



参考図(再掲)

(旧数学 I ・旧数学 A 第 5 問は次ページに続く。)

旧数学 I ・旧数学 A

(ii) 平面 BCFE と球面 S が交わる部分に着目すると、方べきの定理より

$$PC = \boxed{\text{ケ}}$$

となる。したがって

$$EF = \boxed{\text{コサ}}, \quad DF = \boxed{\text{シス}}$$

となる。

(iii) $\angle ADE$, $\angle ADF$, $\angle EDF$ の大きさに着目すると、次の命題 (a), (b), (c) の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{セ}}$ であることがわかる。

- (a) 平面 ABED と平面 DEF は垂直である。
- (b) 直線 DE は平面 ACFD に垂直である。
- (c) 直線 AC と直線 DE は垂直である。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	偽