

数学C 平面上の曲線

「式と曲線」としている教科書もある.

放物線 / 放物線の標準形のグラフ I / 放物線の標準形のグラフ II / 楕円 / 楕円の標準形のグラフ I / 楕円の標準形のグラフ II / 円と楕円 / 双曲線 / 双曲線の標準形のグラフ I / 双曲線の標準形のグラフ II / 双曲線の漸近線 / 直角双曲線 / 中心が原点の楕円の接線公式 / 中心が原点の双曲線の接線公式 / 2次曲線 / 中心が原点の2次曲線の接線公式 / 標準形の放物線の接線公式 / 曲線 $F(x, y) = 0$ の平行移動 / 2次曲線と直線の位置関係 / 光線の反射 / 放物線の反射 / 楕円の反射 / 双曲線の反射 / ★離心率 / ★楕円の準円 / ★双曲線の準円 / ★放物線の準円 / 媒介変数表示 / 関数 $y = f(x)$ の媒介変数表示 / 円の媒介変数表示 / 楕円の媒介変数表示 / 双曲線の媒介変数表示 / 直交座標 / 極座標 / 極方程式 / 直交座標と極座標の関係 / 直交座標の方程式と極方程式の変換 / 極を通る直線の極方程式 / 極を通らない直線の極方程式 / 中心を極とする円の極方程式 / 極を通る円の極方程式 / 極座標の2点間の距離(余弦定理) / 極を通らない円の極方程式 / ★極が焦点の標準形の放物線の極方程式 / ★極が焦点の標準形の楕円の極方程式 / 極方程式の媒介変数表示 / ★離心率と極座標 /

放物線

平面上で

定点 F と F を通らない定直線 l から等距離にある点 P の軌跡

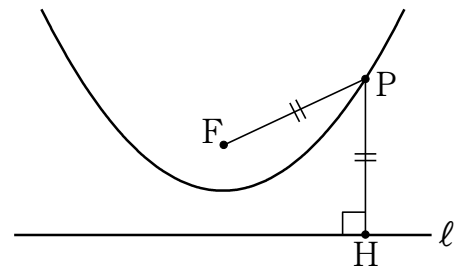
を ほうぶつせん 放物線 という.

すなわち

点 P から l へ下ろした垂線を PH として

$PF = PH$ を満たす点 P の軌跡を放物線 という.

このとき 点 F を しょうてん 焦点 といい, 直線 l を じゅんせん 準線 という.



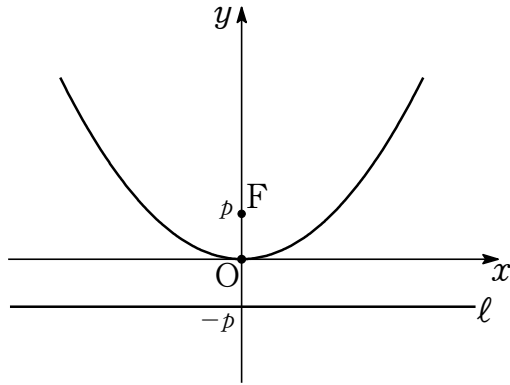
放物線の標準形とグラフ I

座標平面で

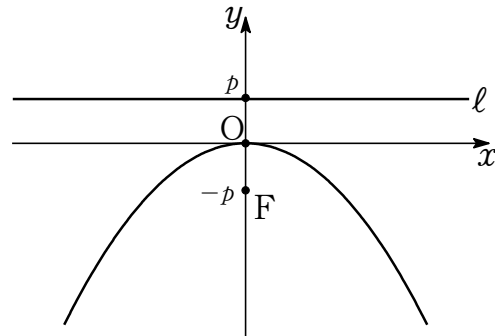
$$x^2 = 4py \quad (p \neq 0)$$

のグラフは **放物線** であり、次のような概形になる。

[$p > 0$ のとき]



[$p < 0$ のとき]



このグラフについて

- ① 頂点は $(0, 0)$
- ② 焦点は $F(0, p)$
- ③ 準線 l の方程式は $y = -p$
- ④ 軸の方程式は $x = 0$ (y 軸)
- ⑤ $\begin{cases} \text{下に凸} & (p > 0) \\ \text{上に凸} & (p < 0) \end{cases}$
- ⑥ この放物線上の点を P とし、点 P から準線 l へ垂線 PH を下ろすと
 $PF = PH$ (定義)

⑧ この放物線上の点を $P(X, Y)$ とし、点 P から準線 l へ垂線 PH を下ろすと

$$PF = \sqrt{X^2 + (Y - p)^2}$$

$$PH = |Y - (-p)| = |Y + p|$$

$$PF = PH \iff PF^2 = PH^2 \text{ であるから } X^2 + (Y - p)^2 = (Y + p)^2$$

$$\text{よって } X^2 = 4pY$$

⑨ $x^2 = 4py$ を放物線の方程式の標準形という。

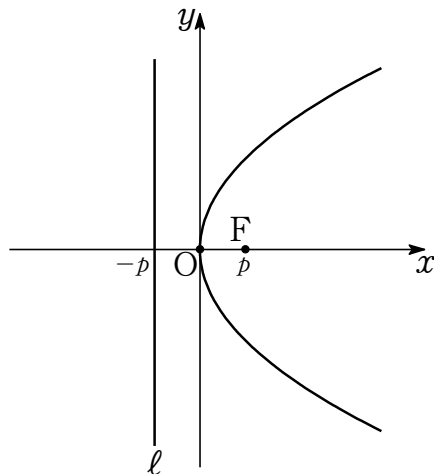
放物線の標準形とグラフ II

座標平面で

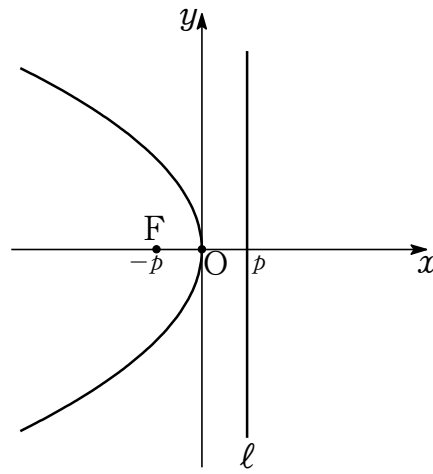
$$y^2 = 4px \quad (p \neq 0)$$

のグラフは **放物線** であり, 次のような概形になる.

[$p > 0$ のとき]



[$p < 0$ のとき]



このグラフについて

- ① 頂点は $(0, 0)$
- ② 焦点は $F(p, 0)$
- ③ 準線 l の方程式は $x = -p$
- ④ 軸の方程式は $y = 0$ (x 軸)
- ⑤ x 軸方向に対して $\begin{cases} \text{下に凸} & (p > 0) \\ \text{上に凸} & (p < 0) \end{cases}$
- ⑥ この放物線上の点を P とし, 点 P から準線 l へ垂線 PH を下ろすと
 $PF = PH$ (定義)

⑦ この放物線上の点を $P(X, Y)$ とし, 点 P から準線 l へ垂線 PH を下ろすと

$$PF = \sqrt{(X - p)^2 + Y^2}$$

$$PH = |X - (-p)| = |X + p|$$

$$PF = PH \iff PF^2 = PH^2 \text{ であるから } (X - p)^2 + Y^2 = (X + p)^2$$

$$\text{よって } Y^2 = 4pX$$

⑧ $y^2 = 4px$ を放物線の方程式の標準形という.

楕円

平面上で

異なる 2 つの定点 F と F' からの距離の和が一定である点 P の軌跡

を ^{だえん}楕円 という.

すなわち

$$PF + PF' = (\text{定数})$$

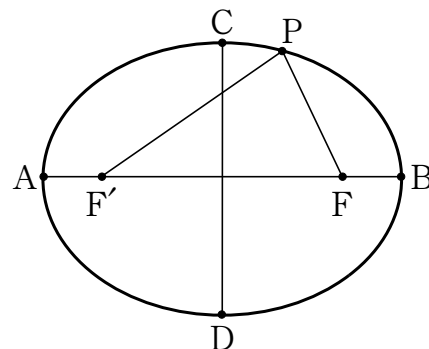
をみたす点 P の軌跡を楕円 という.

ただし $PF + PF' > FF'$ とする.

このとき 点 F, F' を 焦点 という.

また, 右図の 4 点 A, B, C, D を楕円の頂点といい

線分 AB を ^{ちょうじく}長軸 といい, 線分 CD を ^{たんじく}短軸 という.



⑧補 $PF + PF' = (\text{長軸の長さ})$

⑧補 $PF + PF' = FF'$ となる点 P の軌跡は 線分 FF' となる.

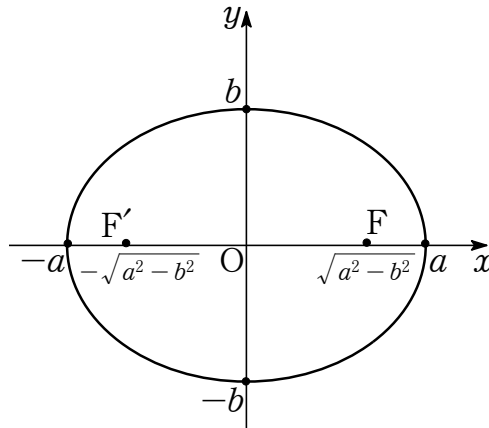
$PF + PF' < FF'$ となる点 P は存在しない.

楕円の標準形とグラフ I

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

のグラフは楕円であり、次のような概形となる。



このグラフについて

- ① 中心は $(0, 0)$
- ② 焦点は $(\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- ③ 頂点は $(\pm a, 0), (0, \pm b)$
- ④ 長軸の長さは $2a$
- ⑤ 短軸の長さは $2b$
- ⑥ この楕円上の点を P とし、2つの焦点を F, F' とすると

$$PF + PF' = 2a \quad (\text{長軸の長さ})$$

補 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を楕円の方程式の標準形という。

考 $PF + PF' = 2a \dots\dots$ ①

$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ とする。

$PF + PF' > FF' = 2|c|$ なので $a > c > 0$

$P(X, Y)$ とおくと ① より $\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} + \sqrt{(X + c)^2 + Y^2} = 2a$

すなわち $\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = 2a - \sqrt{(X + c)^2 + Y^2}$

両辺正より 2 乗して整理すると $a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} = a^2 + cX$

$X \geq -\frac{a^2}{c} > -a$ のもとで両辺 2 乗しても同値で $(a^2 - c^2)X^2 + a^2Y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

$\sqrt{a^2 - c^2} = b$ とおくと $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

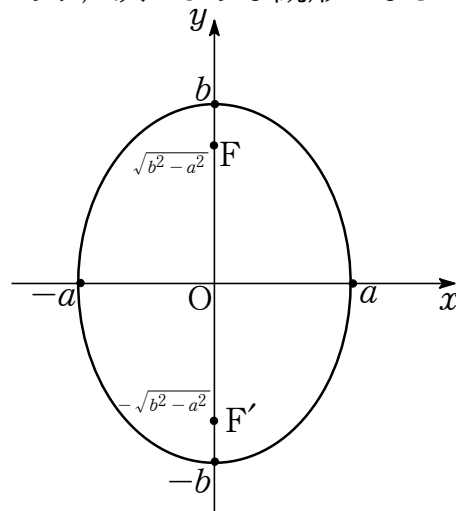
$$b^2X^2 + a^2Y^2 = a^2b^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

楕円の標準形とグラフ II

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0)$$

のグラフは楕円であり、次のような概形となる。



このグラフについて

- ① 中心は $(0, 0)$
- ② 焦点は $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$
- ③ 頂点は $(\pm a, 0), (0, \pm b)$
- ④ 長軸の長さは $2b$
- ⑤ 短軸の長さは $2a$
- ⑥ この楕円上の点を P とし、2つの焦点を F, F' とすると
 $PF + PF' = 2b$ (長軸の長さ)

⑨ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を楕円の標準形という。

円と楕円

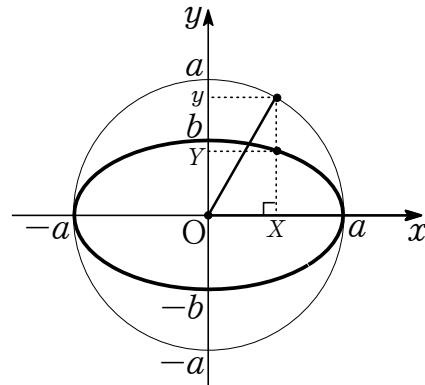
$a > 0, b > 0$ とする.

座標平面で、中心が原点、半径 a の円

$$x^2 + y^2 = a^2$$

を y 軸正方向に $\frac{b}{a}$ 倍すると

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



① 円 $x^2 + y^2 = a^2$ ……①

上の点を (x, y) とし、これを y 軸正方向に $\frac{b}{a}$ 倍した点を (X, Y) とすると

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{b}{a}y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = X \\ y = \frac{a}{b}Y \end{cases}$$

となることから、①は

$$X^2 + \frac{a^2}{b^2}Y^2 = a^2$$

両辺を a^2 で割って

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

ちなみに、①の面積を S 、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の面積を T とすると、

S を $\frac{b}{a}$ 倍して T となる.

すなわち $T = \frac{b}{a}S$

$S = \pi a^2$ であるから $T = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$

双曲線

平面上で

異なる 2 つの定点 F と F' からの距離の差が一定である点 P の軌跡

を そうきょくせん 双曲線 という.

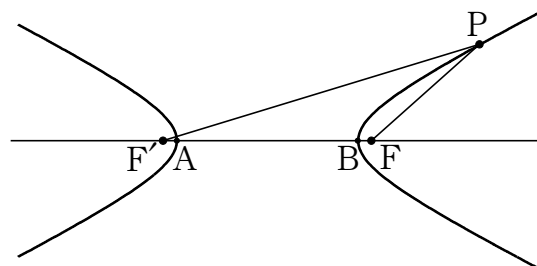
すなわち

$$|PF - PF'| = (\text{定数})$$

をみたす点 P の軌跡を双曲線 という.

このとき 点 F, F' を 焦点 という.

また, 右図の 2 点 A, B を双曲線の頂点といい, 直線 AB を しゅじく 主軸 という.



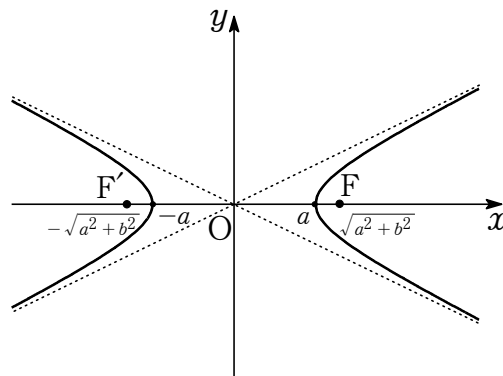
⑧ $|PF - PF'| = (\text{頂点間の距離})$

双曲線の標準形とグラフ I

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

のグラフは 双曲線 であり, 次のような概形となる.



このグラフについて

- ① 中心は $(0, 0)$
- ② 焦点は $(\pm \sqrt{a^2 + b^2}, 0)$
- ③ 頂点は $(\pm a, 0)$
- ④ 頂点間の距離は $2a$
- ⑤ 主軸の方程式は $y = 0$ (x 軸)
- ⑥ 漸近線の方程式は $y = \pm \frac{b}{a}x$
- ⑦ この双曲線上の点を P とし, 2つの焦点を F, F' とすると
 $|PF - PF'| = 2a$ (頂点間の距離)

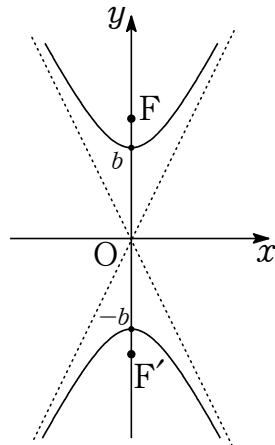
補 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を双曲線の標準形という.

双曲線の標準形とグラフ II

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0)$$

のグラフは 双曲線 であり, 次のような概形となる.



このグラフについて

- ① 中心は $(0, 0)$
- ② 焦点は $(0, \pm\sqrt{a^2 + b^2})$
- ③ 頂点は $(0, \pm b)$
- ④ 頂点間の距離は $2b$
- ⑤ 主軸の方程式は $x = 0$ (y 軸)
- ⑥ 漸近線の方程式は $y = \pm \frac{b}{a}x$
- ⑦ この双曲線上の点を P とし, 2つの焦点を F, F' とすると

$$|PF - PF'| = 2b \quad (\text{頂点間の距離})$$

⑧ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ を双曲線の標準形という.

双曲線の漸近線

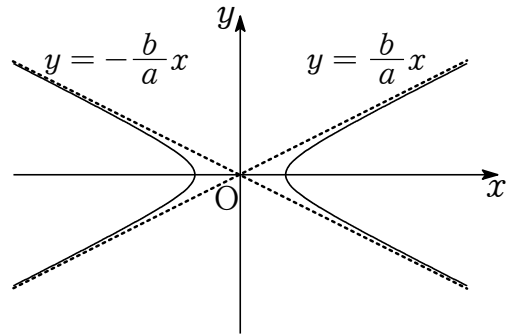
双曲線には漸近線が 2 本存在する.

とくに

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

の漸近線の方程式は

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$



⑧ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{y^2}{x^2} - \frac{b^2}{a^2} = -\frac{b^2}{x^2}$

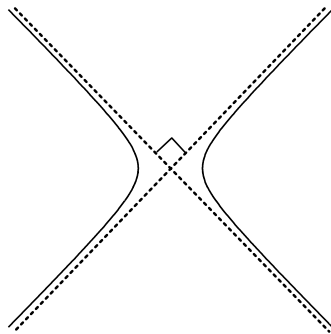
これより $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{b^2}{x^2} \right) = 0$

漸近線の方程式は $\frac{y^2}{x^2} - \frac{b^2}{a^2} = 0$ すなわち $y = \pm \frac{b}{a} x$

⑨ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$) の漸近線も $y = \pm \frac{b}{a} x$

直角双曲線

直交する漸近線をもつ双曲線を 直角双曲線 という.



① 直角双曲線に $x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$), $y = \frac{1}{x}$ がある.

$x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$) の漸近線の方程式は $y = \pm x$ で直交する.

$y = \frac{1}{x}$ の漸近線の方程式は $y = 0$ (x 軸), $x = 0$ (y 軸) で直交する.

中心が原点の楕円の接線公式

座標平面において

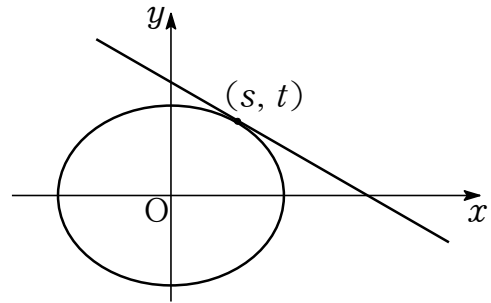
中心が原点の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} = 1$$

を満たすもつて

$$\frac{sx}{a^2} + \frac{ty}{b^2} = 1$$



補 方程式で $x^2 \rightarrow sx, y^2 \rightarrow ty$ と置き換えると接線の方程式になる。

補 $a = b$ のときは円になる。

考 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) ……①

あ $t \neq 0$ のとき

接線の方程式は傾きを m として

$$y = m(x - s) + t \quad \dots\dots②$$

$$= mx - (sm - t)$$

これを ① へ代入して整理すると

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2m(sm - t)x + a^2(sm - t)^2 - a^2b^2 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を 0 として、重解は

$$x = \frac{a^2m(sm - t)}{a^2m^2 + b^2}$$

これが接点の x 座標 s になるので

$$s = \frac{a^2m(sm - t)}{a^2m^2 + b^2} \quad \text{すなわち} \quad m = -\frac{b^2s}{a^2t}$$

これを ② へ代入して $y = -\frac{b^2s}{a^2t}(x - s) + t$

$$\text{整理すると} \quad \frac{sx}{a^2} + \frac{ty}{b^2} = \frac{s^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2}$$

$$= 1$$

い $t = 0$ のとき

接線の方程式は $x = \pm a$

例 楕円 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式は

$$\frac{2x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

中心が原点の双曲線の接線公式

座標平面において

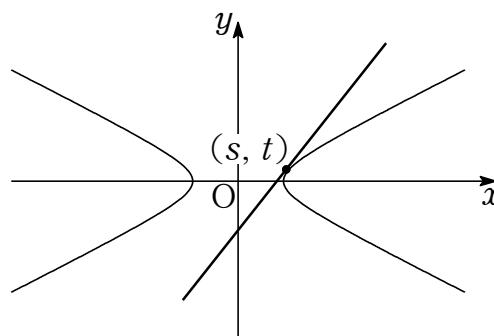
中心が原点の双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$\frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1$$

を満たすもとで

$$\frac{sx}{a^2} - \frac{ty}{b^2} = 1$$



⑧ 方程式で $x^2 \rightarrow sx, y^2 \rightarrow ty$ と置き換えると接線の方程式になる.

2 次曲線

円, 楕円, 双曲線, 放物線をまとめて **2 次曲線** という.

- ⑧ 座標平面において, 円, 楕円, 双曲線, 放物線は x と y の 2 次式で表せる.
- ⑧ 円錐の切り口に出てくる図形なので円錐曲線ともいう.

中心が原点の 2 次曲線の接線公式

座標平面に中心が原点の 2 次曲線 $C : px^2 + qy^2 = 1$

がある。

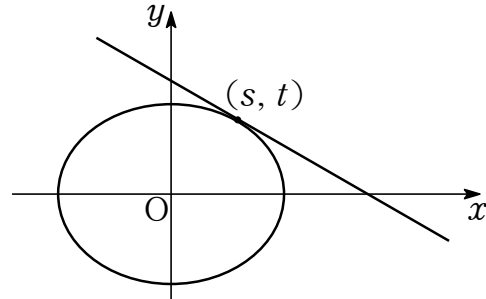
ただし p, q は C が円, 楕円, 双曲線のいずれかになるような定数とする。

C 上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$ps^2 + qt^2 = 1$$

を満たすもとで

$$psx + qty = 1$$



⑧ 補 C の方程式で $x^2 \rightarrow sx, y^2 \rightarrow ty$ と置き換えると接線の方程式になる。

⑨ 参 中心が原点の楕円の接線公式, 中心が原点の双曲線の接線公式

⑩ 考 C 上に点 (s, t) があるので $ps^2 + qt^2 = 1 \dots\dots$ ①

C を x で微分して $2px + 2qy \frac{dy}{dx} = 0$ すなわち $\frac{dy}{dx} = -\frac{px}{qy}$ ($y \neq 0$)

$t \neq 0$ のもとで点 (s, t) における接線の傾きは $-\frac{ps}{qt}$

接線の方程式は $y = -\frac{ps}{qt}(x - s) + t$ すなわち $psx + qty = ps^2 + qt^2$

① から $psx + qty = 1$

これは $t = 0$ のときも成り立つ。

標準形の放物線の接線公式

座標平面において

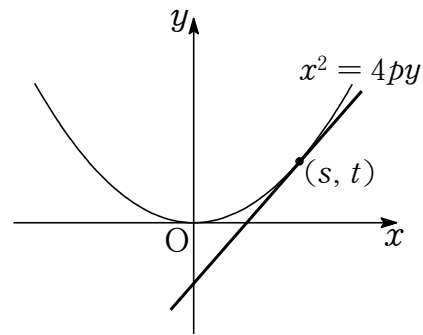
① 放物線 $x^2 = 4py$ ($p \neq 0$)

上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$s^2 = 4pt$$

を満たすもとの

$$sx = 2p(y + t)$$



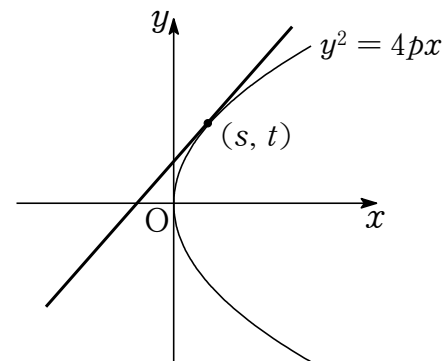
② 放物線 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)

上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$t^2 = 4ps$$

を満たすもとの

$$ty = 2p(x + s)$$



補 ① 方程式で $x^2 \rightarrow sx$, $y \rightarrow \frac{y+t}{2}$ と置き換えると接線の方程式になる.

② 方程式で $x \rightarrow \frac{x+s}{2}$, $y^2 \rightarrow ty$ と置き換えると接線の方程式になる.

考 ① $x^2 = 4py$ を x で微分して $2x = 4py'$ すなわち $y' = \frac{x}{2p}$

接線の方程式は $y = \frac{s}{2p}(x - s) + t$ すなわち $2py = sx - s^2 + 2pt$

$s^2 = 4pt$ を代入して $2py = sx - 4pt + 2pt$

よって $sx = 2p(y + t)$

② ① と同様.

話 この公式は覚えなくても微分して接線を求めてればよいかなと思う.

例 $x^2 = 4y$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式は

$$2x = 2(y + 1) \text{ すなわち } y = x - 1$$

別 $y = \frac{x^2}{4}$ を x で微分して $y' = \frac{x}{2}$

接線の方程式は

$$y = (x - 2) + 1 \text{ すなわち } y = x - 1$$

曲線 $F(x, y) = 0$ の平行移動

座標平面において、曲線 $F(x, y) = 0$ を

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動された曲線の方程式は

$$F(x - p, y - q) = 0$$

2 次曲線と直線の位置関係

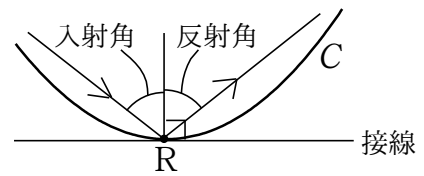
座標平面において、2 次曲線と直線の位置関係は

2 式を連立して 2 次方程式をつくり、実数解の個数を調べる。

光線の反射

直進する光線が曲線 C 上の点 R で反射した後、
再び直進するとき

点 R において、 C の接線に対し、入射角と反射角が等しい。



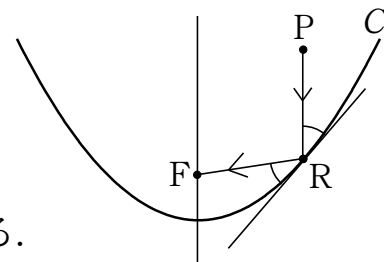
放物線の反射

放物線 C の焦点を F とする.

右の図のように

点 P から C の対称軸に平行な光線が直進し

C 上の点 R で反射するとき, 反射光は焦点 F に集まる.



補) パラボラアンテナ (parabola antenna) はこの性質を利用している.

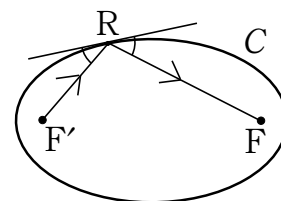
楕円の反射

楕円 C の 2 つの焦点を F, F' とする.

右の図のように

1 つの焦点点 F' から光線が直進し

C 上の点 R で反射するとき, 反射光は他方の焦点 F に集まる.



双曲線の反射

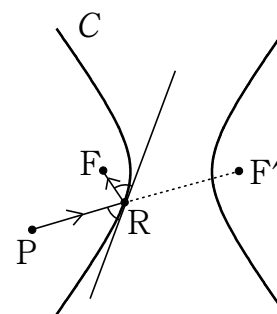
双曲線 C の 2 つの焦点を F, F' とする.

右の図のように

点 P から 1 つの焦点 F' に向かって光線が直進し

C 上の点 R で反射するとき, 反射光の延長は

他方の焦点 F に集まる.



離心率

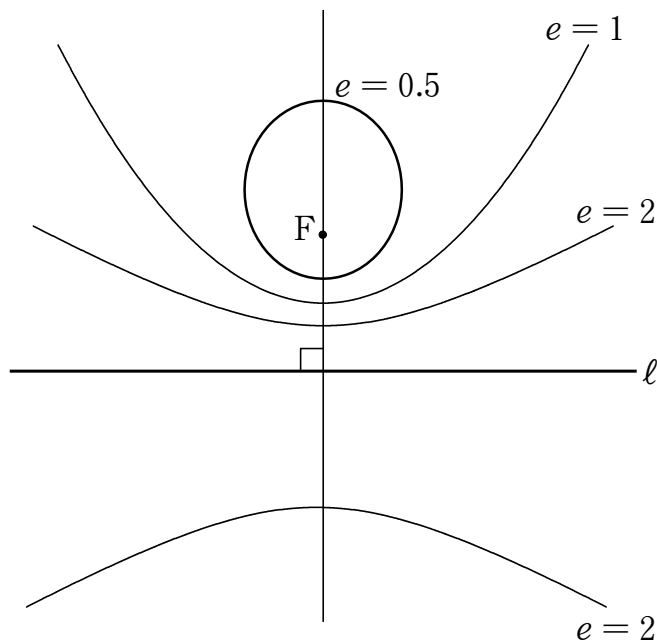
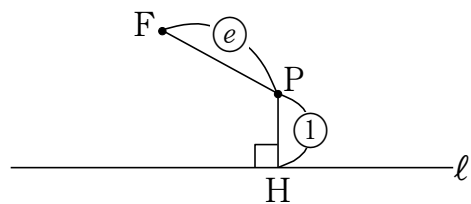
平面上で

定点 F からの距離と F を通らない定直線 l からの距離の比が $e : 1$ である点 P

つまり 点 P から定直線 l へ垂線 PH へ下ろすと

$$PF : PH = e : 1 \quad \text{すなわち} \quad e = \frac{PF}{PH}$$

となる点 P の軌跡は次になる.



① $0 < e < 1$ のとき

F を焦点の 1 つとする楕円

② $e = 1$ のとき

F を焦点, l を準線とする放物線

③ $1 < e$ のとき

F を焦点の 1 つとする双曲線

この e の値を 2 次曲線の^{りしんりつ}離心率 といい 定直線 l を準線という.

⑨ e が 0 に近いほど, 点 P の軌跡は円に近づく.

⑩ 離心率と 2 次曲線

★楕円の準円

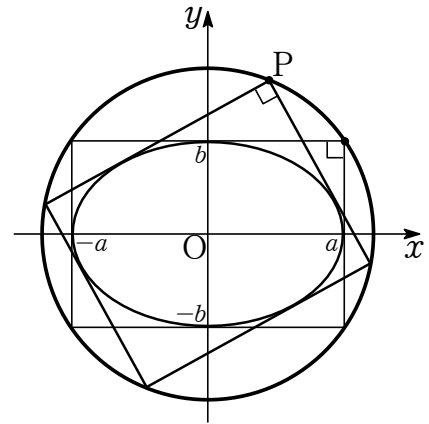
座標平面において

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

へ 2 本の直交する接線が引けるような点 P の軌跡は

$$\text{円 } x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

この円を楕円の じゅんえん 準円 という。



⑧ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \dots\dots①$

P(X, Y) とおく.

⑧ $X = \pm a$ のとき

P(X, Y) は $x = \pm a, y = \pm b$ 上にあるから

$$(X, Y) = (\pm a, \pm b) \dots\dots②$$

⑨ $X \neq \pm a$ のとき

点 P(X, Y) を通る ① の接線の方程式は

y 軸に平行ではないので傾きを m として

$$y = m(x - X) + Y \dots\dots③$$

③ を ① へ代入して $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\{m(x - X) + Y\}^2}{b^2} = 1$

両辺 a^2b^2 をかけて $b^2x^2 + a^2\{mx + (Y - mX)\}^2 = a^2b^2$

展開して整理して

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2m(Y - mX)x + a^2\{(Y - mX)^2 - b^2\} = 0 \dots\dots④$$

判別式を D として

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^4m^2(Y - mX)^2 - a^2(b^2 + a^2m^2)\{(Y - mX)^2 - b^2\} \\ &= a^2\{a^2m^2(Y - mX)^2 - b^2(Y - mX)^2 - a^2m^2(Y - mX)^2 + b^4 + a^2b^2m^2\} \\ &= a^2b^2\{-(Y - mX)^2 + b^2 + a^2m^2\} \\ &= a^2b^2\{(a^2 - X^2)m^2 + 2XYm + b^2 - Y^2\} \end{aligned}$$

③ と ① は接するから ④ が重解 x をもつので $D = 0$ なので

$$(a^2 - X^2)m^2 + 2XYm + b^2 - Y^2 = 0 \dots\dots⑤$$

⑤ をみたく m を m_1, m_2 とすると解と係数の関係から

$$m_1m_2 = \frac{b^2 - Y^2}{a^2 - X^2} \dots\dots⑥$$

m_1, m_2 は ③ を満たす傾きであり, これらは直交するので $m_1m_2 = -1 \dots\dots⑦$

⑦ を ⑥ へ代入して $-1 = \frac{b^2 - Y^2}{a^2 - X^2}$ すなわち $X^2 + Y^2 = a^2 + b^2 \dots\dots⑧$

②, ⑧ より点 P の軌跡の方程式は 円 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

⑨ 楕円の準円

★双曲線の準円

座標平面において

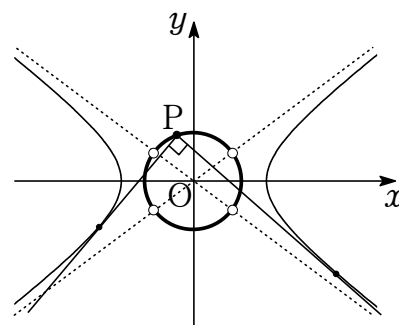
$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

へ 2 本の直交する接線が引けるような点 P の軌跡は

$$\text{円 } x^2 + y^2 = |a^2 - b^2| \quad (a \neq b)$$

ただし 漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 上の点は除く.

この円を双曲線の じゅんえん 準円 という.



㊦ 双曲線の準円

★放物線の準線 (準円)

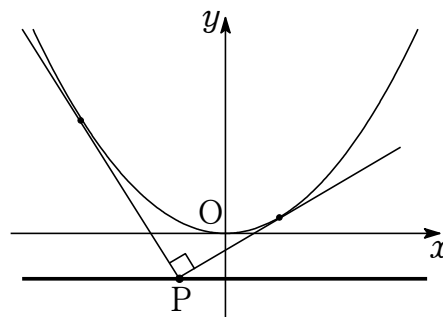
座標平面において

放物線 $x^2 = 4py$ ($p \neq 0$)

へ 2 本の直交する接線が引けるような点 P の軌跡は

直線 $y = -p$

この直線を放物線の じゅんせん 準線 という.



⑨ 補 直線を半径が無大の円と考えて「準線」を「準円」ということもある.

⑩ 考 $x^2 = 4py$ ($p \neq 0$) ……①

$P(X, Y)$ とおく.

$P(X, Y)$ を通る ① の接線の方程式は $y = m(x - X) + Y$ ……②

② を ① へ代入して $x^2 = 4p\{mx - (mX - Y)\}$

すなわち $x^2 - 4mpx + 4p(mX - Y) = 0$

判別式を D として

$$\frac{D}{4} = 4m^2p^2 - 4p(mX - Y) = 4p\{pm^2 - Xm + Y\}$$

② と ① は接するから $D = 0$ なので

$$pm^2 - Xm + Y = 0$$

これをみたす m を m_1, m_2 とすると解と係数の関係から $m_1m_2 = \frac{Y}{p}$

m_1, m_2 は ② を満たす傾きであり, これらは直交するので $m_1m_2 = -1$

このことから $\frac{Y}{p} = -1$ すなわち $Y = -p$

よって, 点 P の軌跡は 直線 $y = -p$

⑪ 放物線の準線

媒介変数表示

座標平面で、曲線 C 上の点 $P(x, y)$ の座標が、変数 t によって

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

の形に表されるとき、これを

曲線 C の ばいかいへんすうひょうじ 媒介変数表示 または パラメータ表示 といい、

変数 t を ばいかいへんすう 媒介変数 または パラメータ という。

⑧ 曲線 C の媒介変数による表示の仕方は一通りではない。

⑧ x, y はそれぞれ t の関数で、 t ごとに点 $P(x, y)$ が決まる。

t を時間とすると、時間ごとに点が動いていくイメージ。

⑧
$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$$

関数 $y = f(x)$ の媒介変数表示

座標平面で、関数 $y = f(x)$ 上の点を $P(x, y)$ とすると、
媒介変数を t として

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

と表せる。

⑧ 補 関数 $y = f(x)$ は x を 1 つ決めると y が 1 つ定まる。

x を媒介変数にすると、 y も同じ媒介変数で表せる。

⑨ 例 関数 $y = x^2 + 2x + 3$ 上の点 $P(x, y)$ を媒介変数 t で表すと

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 2t + 3 \end{cases}$$

円の媒介変数表示

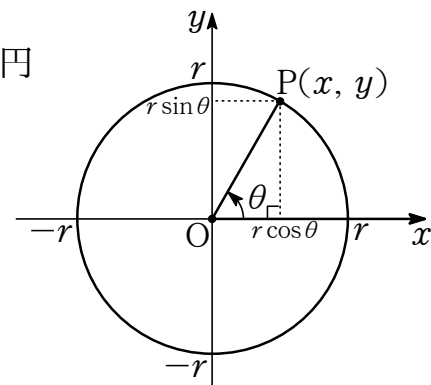
座標平面で、中心を原点 O とする半径 r ($r > 0$) の円

$$x^2 + y^2 = r^2$$

上の点を $P(x, y)$ とすると、媒介変数を θ として

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

と表せる。



⑧ $x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$

楕円の媒介変数表示

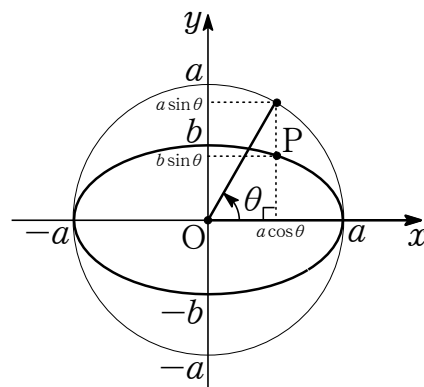
座標平面で、中心を原点 O とする楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

上の点を $P(x, y)$ とすると、媒介変数を θ として

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

と表せる。



⑧ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(b \sin \theta)^2}{b^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

⑨ 円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 (x, y) は

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$$

と表せて、これを y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍して

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \times \frac{b}{a} = b \sin \theta \end{cases}$$

双曲線の媒介変数表示

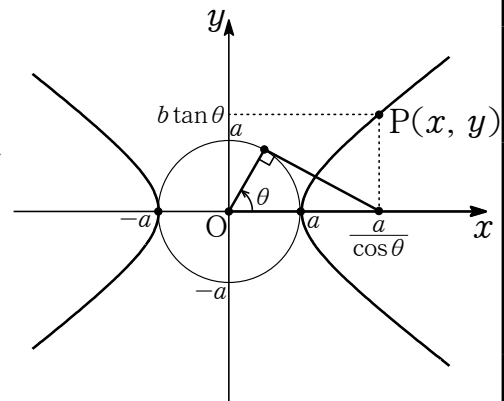
座標平面で、中心を原点 O とする双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

上の点を $P(x, y)$ とすると、媒介変数を θ として

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$$

と表せる.



⑧ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{\cos \theta} \right)^2 - \frac{(b \tan \theta)^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = 1$

⑨ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ の場合は

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

となることから

$$\begin{cases} x = a \tan \theta \\ y = \frac{b}{\cos \theta} \end{cases}$$

と表せる.

⑩ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$ の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

もある.

□直交座標

平面上に直交する x 軸, y 軸の 2 つの座標軸を定めると

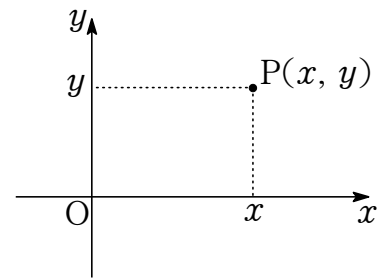
この平面上の任意の点 P は

x 座標, y 座標の組 (x, y)

を定めることができる.

このとき, 組 (x, y) を点 P の **直交座標** という.

座標軸の交点を **原点** といい $O(0, 0)$ とかく.



⑧ いつもの座標.

極座標

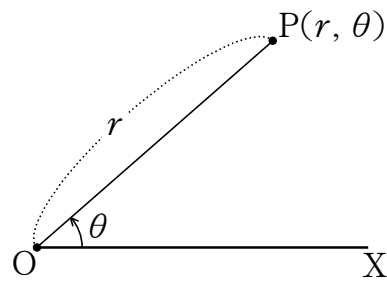
平面上に点 O と半直線 OX を定めると

この平面上の任意の点 P は

O からの距離 r

OX を始線とする角 θ の動径

で定めることができる.



このとき, 組 (r, θ) を点 P の **極座標** きょくざひょう という.

定点 O を **極** きょく, 半直線 OX を **始線** しせん, 角 θ を **偏角** へんかく という.

ただし

$r = 0$ のとき θ を任意の数として極座標 $(0, \theta)$ は極 O を表す.

$r < 0$ のとき 極座標 (r, θ) である点は極座標 $(-r, \theta + \pi)$ とする.

注意として θ は弧度法で表した一般角である.

⑧ 補 直交座標は東西南北で位置が決まるが, 極座標は距離と方向で位置が決まるイメージ.

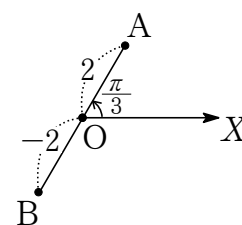
⑧ 補 $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ とすれば平面上のすべての点は表せる.

⑧ 注 座標の表記が直交座標と同じ (\square, \triangle) なので, 直交座標か極座標かをはっきりすること.

⑧ 注 $r < 0$ もありうるので注意する.

⑧ 例 極座標で $A(2, \frac{\pi}{3}), B(-2, \frac{\pi}{3})$ を図示すると右図.

$$\left(-2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(2, \frac{4}{3}\pi\right)$$



極方程式

平面上の曲線が、極座標 (r, θ) を用いた式

$$r = f(\theta) \text{ または } F(r, \theta) = 0$$

と表されるとき、その曲線の きよくほうていしき **極方程式** という。

直交座標と極座標の関係

座標平面において

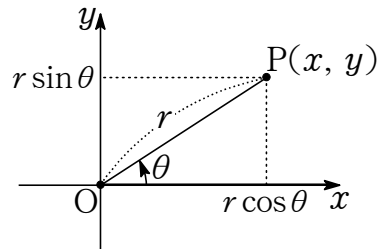
原点 O を極, x 軸の正の部分が始線とする極座標を考えると

点 P の直交座標 (x, y) , 極座標 (r, θ) の間には次のような関係が成り立つ.

① $x = r \cos \theta$

② $y = r \sin \theta$

③ $x^2 + y^2 = r^2$



⑨ 問題文などとくに条件が書かれてない場合は, この設定で考えてよい.

直交座標の方程式と極方程式の変換

- ① 直交座標の方程式 $F(x, y) = 0$ を極方程式で表すのは
 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ を代入して
 r と θ の関係式にする.
- ② 極方程式 $G(r, \theta) = 0$ を直交座標の方程式で表わすのは
 $r \cos \theta = x$, $r \sin \theta = y$, $r^2 = x^2 + y^2$ を代入して
 x と y の関係式にする.

⑧ 大雑把な説明だが, 直交座標と極座標の関係を用いて

① $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

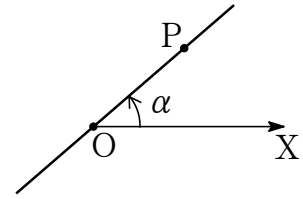
② $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$

- ⑨ ① 直交座標の方程式 $x + y = 1$ を極方程式に表わすのは
 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入して $r \cos \theta + r \sin \theta = 1$
- ② 極方程式 $r = \cos \theta$ を直交座標の方程式で表わすのは
両辺 r をかけて $r^2 = r \cos \theta$
 $r^2 = x^2 + y^2$, $r \cos \theta = x$ を代入して $x^2 + y^2 = x$

極を通る直線の極方程式

極 O を通り、始線とのなす角が α の直線の極方程式は
直線上の点 P の極座標を (r, θ) として

$$\theta = \alpha$$



⑨ $r = 0$ として点 P は極 O

$r < 0$ として点 P は $(r, \alpha) = (-r, \alpha + \pi)$ となる点を表す.

極を通らない直線の極方程式

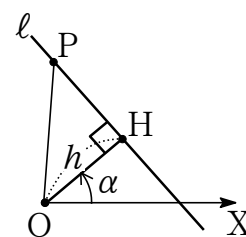
右の図のような極 O を通らない直線 l の極方程式は

極 O から直線 l へ垂線 OH を下ろし

点 H の極座標を (h, α) とし

直線上の点 P の極座標を (r, θ) として

$$r \cos(\theta - \alpha) = h$$



④ 考 $OP = r$, $OH = h$, $\angle POH = |\theta - \alpha|$ を $OH = OP \cos \angle POH$ へ代入する.

④ 補 極方程式 $r \cos(\theta - \alpha) = h$ を直交座標の方程式で表すと

加法定理を用いて $r(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) = h$

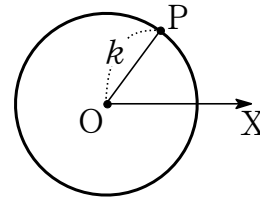
$r \cos \theta = x$, $r \sin \theta = y$ を代入して $(\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y = h$

中心を極とする円の極方程式

極 O を中心とする半径 k の円の極方程式は

円上の点 P の極座標を (r, θ) として

$$r = k$$



⑧ 補 極方程式 $r = k$ を直角座標の方程式で表すと

両辺 2 乗して $r^2 = k^2$

$r^2 = x^2 + y^2$ を代入して $x^2 + y^2 = k^2$

極を通る円の極方程式

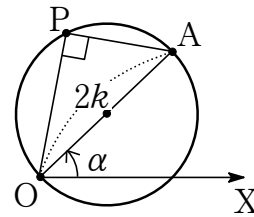
右の図のように極 O を通り半径 k の円の極方程式は

線分 OA が円の直径となるような点 A をとり

点 A の極座標を $(2k, \alpha)$ とし

円上の点 P の極座標を (r, θ) として

$$r = 2k \cos(\theta - \alpha)$$



⑧ $P \neq O, A$ ならば線分 OA は直径なので $\angle OPA = \frac{\pi}{2}$

$OP = r, OA = 2k, \angle AOP = |\theta - \alpha|$ を $OP = OA \cos \angle AOP$ に代入する.

$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ とすると $r = 2k \cos \frac{\pi}{2} = 0$ なので $P = O$

$\theta = \alpha$ とすると $r = 2k \cos 0 = 2k$ なので $P = A$

⑨ 極方程式 $r = 2k \cos(\theta - \alpha)$ を直交座標の方程式で表すと

両辺 r をかけて加法定理を用いて $r^2 = 2kr(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)$

$r^2 = x^2 + y^2, r \cos \theta = x, r \sin \theta = y$ を代入して $x^2 + y^2 = (2k \cos \alpha)x + (2k \sin \alpha)y$

すなわち $(x - k \cos \alpha)^2 + (y - k \sin \alpha)^2 = k^2$

極座標の 2 点間の距離 (余弦定理)

2 点 A, B の極座標をそれぞれ (a, α) , (b, β) とする.

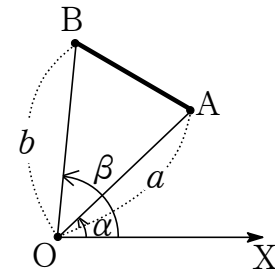
このとき 2 点 A, B の距離は

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta - \alpha)$$

すなわち

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta - \alpha)}$$

これは α と β が一般角でも成り立ち 余弦定理 ということもある.



⑧ 2 点 A, B を直交座標で表すと $A(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$, $B(b \cos \beta, b \sin \beta)$

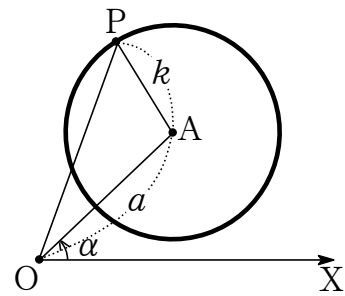
$$\begin{aligned} AB^2 &= (b \cos \beta - a \cos \alpha)^2 + (b \sin \beta - a \sin \alpha)^2 \\ &= b^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + a^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2ab(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) \\ &= b^2 + a^2 - 2ab \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

⑨ $0 < \beta - \alpha < \pi$ とすると, $\angle OAB = \beta - \alpha$ であり, $\triangle OAB$ における余弦定理となる.

極を通らない円の極方程式

中心の極座標が (a, α) , 半径 k の円の極方程式は
 円上の点 P の極座標を (r, θ) として

$$k^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha)$$



⑧ $OP = r, OA = a, AP = k, \angle AOP = |\theta - \alpha|$

$\triangle OAP$ に 極座標の 2 点間の距離 (余弦定理) を用いて

$$k^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha)$$

⑨ 極方程式 $k^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha)$ を直交座標の方程式で表すと

加法定理を用いて $k^2 = r^2 + a^2 - 2ar(\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha)$

$k^2 = x^2 + y^2, r \cos\theta = x, r \sin\theta = y$ を代入して

$$k^2 = x^2 + y^2 + a^2 - (2a \cos\alpha)x - (2a \sin\alpha)y$$

すなわち $(x - a \cos\alpha)^2 + (y - a \sin\alpha)^2 = k^2$

★極が焦点の標準形の放物線の極方程式

直交座標で

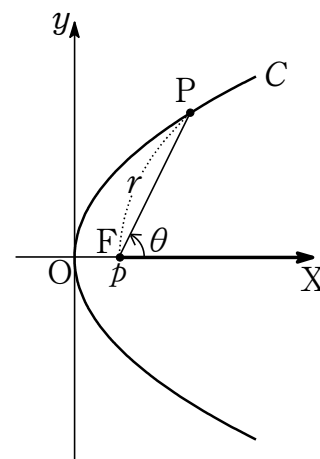
放物線 $C: y^2 = 4px$ ($p > 0$) の焦点を $F(p, 0)$ とする.

F を極, x 軸の正の部分の半直線を始線とする極座標

における C の極方程式は

C 上の点 P の極座標を (r, θ) として

$$r = \frac{2p}{1 - \cos \theta}$$



④ $\vec{OP} = \vec{OF} + \vec{FP} = (p + r \cos \theta, r \sin \theta)$

C の準線を $l: x = -p$ とし, 点 P から l へ垂線 PH を下ろすと

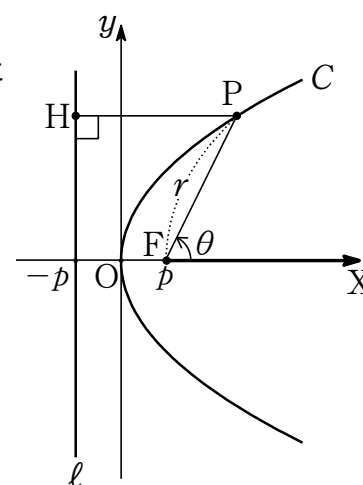
$$PH = p + r \cos \theta - (-p) = 2p + r \cos \theta$$

放物線の定義より $PF = PH$ であるから

$$r = 2p + r \cos \theta \quad \text{すなわち} \quad (1 - \cos \theta)r = 2p$$

点 P は始線上にはないから $\cos \theta \neq 1$

よって $r = \frac{2p}{1 - \cos \theta}$



★極が焦点の標準形の楕円の極方程式

直交座標で

$$\text{楕円 } C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

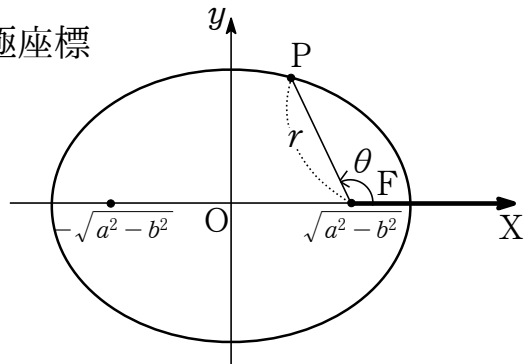
の焦点の1つを $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ とする.

F を極, x 軸の正の部分の半直線を始線とする極座標

における C の極方程式は

C 上の点 P の極座標を (r, θ) として

$$r = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta}$$



⑧ もう1つの焦点を $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ とする.

$$FF' = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{楕円の定義より } PF + PF' = 2a$$

$$PF = r \text{ なので } PF' = 2a - r$$

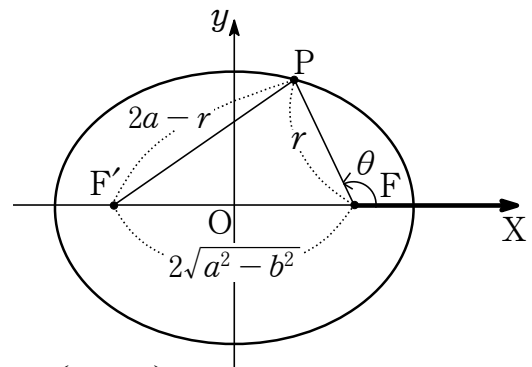
$$F' \text{ の極座標は } (2\sqrt{a^2 - b^2}, \pi)$$

$\triangle PFF'$ に **極座標の2点間の距離 (余弦定理)** を用いて

$$(2a - r)^2 = r^2 + (2\sqrt{a^2 - b^2})^2 - 2 \cdot r \cdot 2\sqrt{a^2 - b^2} \cos(\pi - \theta)$$

$$\text{すなわち } 4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4(a^2 - b^2) + 4r\sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta$$

$$\text{よって } r = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta}$$



極方程式の媒介変数表示

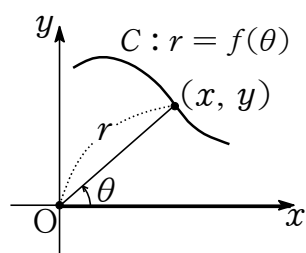
極座標において、極方程式で表される曲線 $C: r = f(\theta)$ について

座標平面で極を O 、始線を x 軸正方向とする極座標とすると

媒介変数 θ で表された曲線

$$C: \begin{cases} x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

と表すことができる。



① 例 極方程式 $r = \theta$ は

$$\begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases}$$

と表せる。

★離心率と極座標

極座標において

極座標が $(a, 0)$ である点 A を通り、始線 OX に垂直な直線を定直線 l とする。

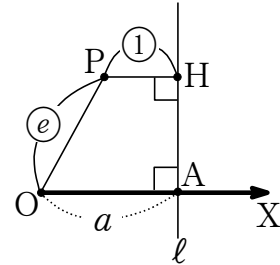
極 O からの距離と定直線 l からの距離の比が $e : 1$ である点 P

つまり 点 P から定直線 l へ垂線 PH へ下ろすと

$$OP : PH = e : 1 \quad \text{すなわち} \quad e = \frac{OP}{PH}$$

となる点 P の軌跡について

$$\text{極方程式は } r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$$



$$\text{直交座標での方程式は } (1 - e^2)x^2 + 2e^2ax + y^2 - e^2a^2 = 0$$

① $0 < e < 1$ のとき

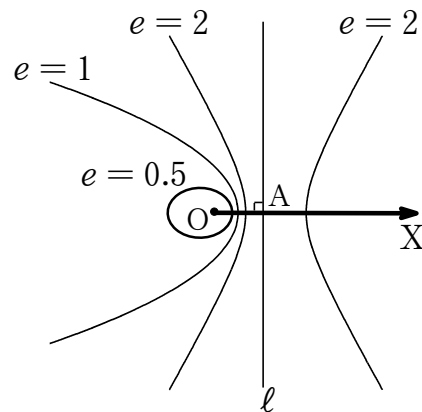
O を焦点の 1 つとする楕円

② $e = 1$ のとき

O を焦点, l を準線とする放物線

③ $1 < e$ のとき

O を焦点の 1 つとする双曲線



この e の値を 2 次曲線の離心率りしんりつ といい 定直線 l を準線という。

補 e が 0 に近いほど、点 P の軌跡は円に近づく。

考 直交座標では $l : x = a$, $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$OP = r, \quad PH = |a - r \cos \theta|$$

$$OP = ePH \text{ より } r = e|a - r \cos \theta|$$

$$r \text{ は負の値もとるので } r = e(a - r \cos \theta) \text{ すなわち } (1 + e \cos \theta)r = ea$$

$$\text{よって、極方程式は } r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$$

$$\text{また、直交座標で } P(x, y) \text{ とすると } OP = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad PH = |a - x|$$

$$OP^2 = e^2PH^2 \text{ より } x^2 + y^2 = e^2(a - x)^2$$

$$\text{よって、直交座標では } (1 - e^2)x^2 + 2e^2ax + y^2 - e^2a^2 = 0$$

補 $r = \frac{ea}{e \cos \theta - 1}$ と表すこともできるが

$$(r, \theta) \text{ を } (-r, \theta + \pi) \text{ とおきかえると } r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} \text{ になる。}$$

つまり 極 O に関して対称になるので、同じ軌跡になる。

補 e が 0 に近いほど、点 P の軌跡は円に近づく。