

数学C 複素数平面

「複素数」は数学 II でも学習しています。

複素数 / 複素数平面 / 複素数平面とベクトル /
複素数平面における複素数の和 / 複素数平面における複素数の差 /
複素数平面における複素数の実数倍 / 共役な複素数 / 共役な複素数の性質 /
共役な複素数と複素数平面 / 複素数平面と対称移動 /
互いに共役な複素数の和と積 / ★複素数の実部の虚部 /
複素数が実数になる条件 / 複素数が純虚数になる条件 / 複素数の絶対値 /
複素数の絶対値の性質 / 複素数の絶対値の平方 / 複素数の絶対値の展開 /
複素数の偏角 / 複素数の極形式 / 複素数 $a + bi$ を極形式で表す /
共役な複素数の極形式 / 極形式の複素数の積 / 極形式の複素数の商 /
ド・モアブルの定理 / 極形式の累乗 / 偏角の性質 /
中心が原点の回転移動 / 中心が原点以外の回転移動 /
中心が原点の回転移動と拡大・縮小 /
中心が原点以外の回転移動と拡大・縮小 /
複素数平面の3点のなす角 / 複素数平面の3点の位置関係 /
複素数平面の4点の位置関係 / 内分点を表す複素数 /
外分点を表す複素数 / 三角形の重心を表す複素数 / 直線を表す複素数 /
複素数平面の2点間の距離 / 垂直二等分線を表す複素数 /
円を表す複素数 / 原点を通る直線に関して2点が対称になる条件 /
1の n 乗根 / 実数係数の高次方程式と虚数解 /

□ 複素数

虚数単位 i と 2 つの実数 a, b を用いて, 数 z が

$$z = a + bi$$

と表されるとき z を ^{ふくそすう}複素数 という.

このとき

① a を z の ^{じつぶ}実部 (real part) という.

② b を z の ^{きよぶ}虚部 (imaginary part) という.

⑨ 例 $z = 5 + 2i$ は複素数で, 実部は 5, 虚部は 2

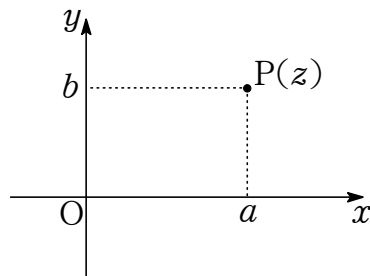
⑩ 補 複素数に関しては数学 II も復習しておきたい.

数学 C では複素数を図形的にとらえることを考える.

複素数平面

i を虚数単位, a, b を実数とする.

平面上に座標軸を定め 複素数 $z = a + bi$ を 点 $P(a, b)$ に対応させる.



このように, 各点 (a, b) が複素数 $z = a + bi$ を表している平面を

ふくそすうへいめん ふくそへいめん
 複素数平面 または 複素平面 という.

このとき x 軸を ^{じつじく}実軸 といひ, y 軸を ^{きょじく}虚軸 という.

実軸上の点 は実数 を表し, 虚軸上の原点 O と異なる点 は純虚数 を表わす.

複素数 z に対応する点 P を $P(z)$ と表す. この点を 点 z ということもある.

とくに 実数 0 は 原点 O を表す.

- ⑨ 補 すべての複素数はそれぞれ平面上の 1 つの点で表され, 逆に, 平面上の 1 つのすべての点 はそれぞれ 1 つの複素数で表されることになる.
- ⑨ 補 教科書では実軸を x 軸, 虚軸を y 軸としているので, 座標平面と同じ表記となる.
 実軸を Re , 虚軸を Im とかくこともある.
- ⑨ 補 複素数平面を複素平面ということもある.

複素数平面とベクトル

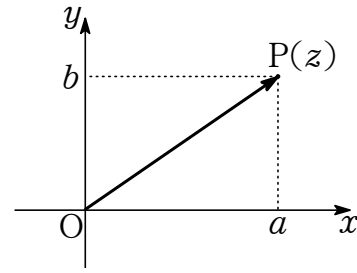
$z = a + bi$ (a, b は実数) とする.

複素数平面の原点 O , 点 $P(z)$ について

点 z は $\vec{OP} = (a, b)$ と同一視できる.

とくに 点 0 は $\vec{0} = (0, 0)$ と同一視できる.

このことから, 複素数の和, 差, 実数倍に関してはベクトルと同じ演算になる.



- ⑧ 複素数平面の表す点を, 始点が原点の位置ベクトルの表す点ととらえれば, ベクトルで考えることもできる.
もちろん, 座標平面の表す点ととらえてもよい.

複素数平面における複素数の和

2つの複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ (a, b, c, d は実数) について

$$\text{和: } \alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

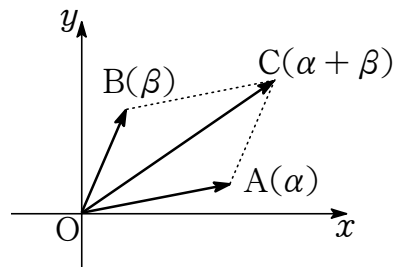
これをベクトルで考えると

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

つまり 複素数平面で α , β , $\alpha + \beta$ の表す点を

それぞれ A , B , C とすると

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$



⑨ \vec{OA} , \vec{OB} が 1 次独立ならば, 四角形 $OACB$ は平行四辺形

複素数平面における複素数の差

2つの複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ (a, b, c, d は実数) について

$$\text{差: } \alpha - \beta = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

これをベクトルで考えると

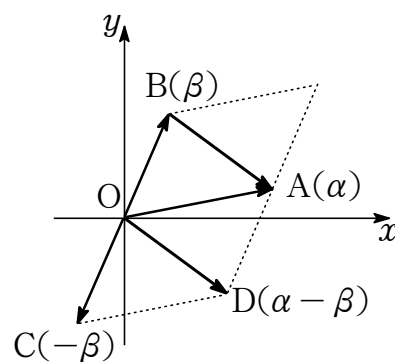
$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

つまり 複素数平面で $\alpha, \beta, -\beta, \alpha - \beta$ の表す点を

それぞれ A, B, C, D とすると

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OD}$$

すなわち $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$



⑨ $\vec{OD} = \vec{BA}$

複素数平面における複素数の実数倍

複素数 $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) について, k を実数として

$$\text{実数倍: } k(a + bi) = ka + kbi$$

$$\text{とくに } k = -1 \text{ として } -\alpha = -(a + bi) = -a - bi$$

これをベクトルで考えると

$$k(a, b) = (ka, kb)$$

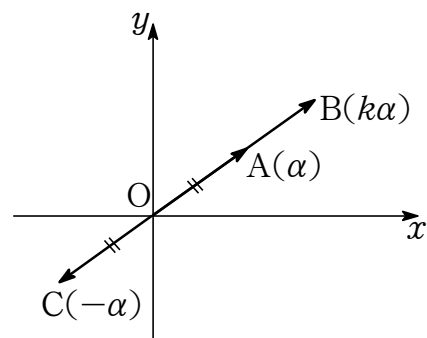
$$\text{とくに } k = -1 \text{ として } -(a, b) = (-a, -b)$$

つまり 複素数平面で $\alpha, k\alpha, -\alpha$ の表す点を

それぞれ A, B, C とすると

$$k\vec{OA} = \vec{OB}$$

$$-\vec{OA} = \vec{OC}$$



⑧ 図は $k > 1$

⑨ 3点 O, A, B は同一直線上にある.

⑩ $k = -1$ ならば 2点 A, C は点 O に関して対称

共役な複素数

a, b を実数とする.

2つの複素数 $a + bi$ と $a - bi$ を互いに きょうやく ふくそすう 共役な複素数 という.

複素数 z と共役な複素数を \bar{z} と表す.

つまり 実部が同じで虚部の符号が異なる複素数を互いに共役であるとい

複素数 $z = a + bi$ の共役な複素数は $\bar{z} = a - bi$ である.

① $z = 3 + 4i$ の共役な複素数は $\bar{z} = 3 - 4i$

共役な複素数の性質

複素数 z, w について, 次のことがいえる.

$$\boxed{1} \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\boxed{2} \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\boxed{3} \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

$$\boxed{4} \quad \overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$\boxed{5} \quad \overline{(z)^n} = (\bar{z})^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

⑧ $z = a + bi, w = c + di$ (a, b, c, d は実数)

とする.

$$\begin{aligned} \boxed{1} \text{ (左辺)} &= \overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i \\ \text{(右辺)} &= \bar{z} + \bar{w} = \overline{(a + bi)} + \overline{(c + di)} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i \\ &\text{よって (左辺)} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \text{ (左辺)} &= \overline{z - w} = \overline{(a + bi) - (c + di)} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i \\ \text{(右辺)} &= \bar{z} - \bar{w} = \overline{(a + bi)} - \overline{(c + di)} = (a - bi) - (c - di) = (a - c) - (b - d)i \\ &\text{よって (左辺)} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{3} \text{ (左辺)} &= \overline{zw} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad - bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad - bc)i \\ \text{(右辺)} &= \bar{z}\bar{w} = \overline{(a + bi)}\overline{(c + di)} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad - bc)i \\ &\text{よって (左辺)} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{4} \text{ (左辺)} &= \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{a + bi}{c + di}\right)} = \frac{\overline{(a + bi)(c - di)}}{\overline{(c + di)(c - di)}} = \frac{\overline{(ac + bd - ad - bc i)}}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} i \\ \text{(右辺)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{\overline{a + bi}}{\overline{c + di}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} i \\ &\text{よって (左辺)} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{5} \text{ (左辺)} &= \overline{(z)^n} = \overline{z \cdot z \cdot \dots \cdot z} = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \dots \cdot \bar{z} \quad (\because \boxed{3}) \\ \text{(右辺)} &= (\bar{z})^n = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \dots \cdot \bar{z} \\ &\text{よって (左辺)} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

要

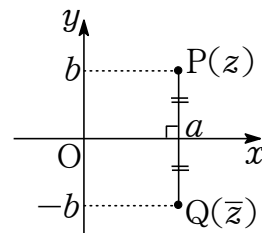
バーはバラバラにバラすことができる!

共役な複素数と複素数平面

複素数 $z = a + bi$ とその共役な複素数 $\bar{z} = a - bi$ (a, b は実数) について

z と \bar{z} は **実軸** に関して **対称** である.

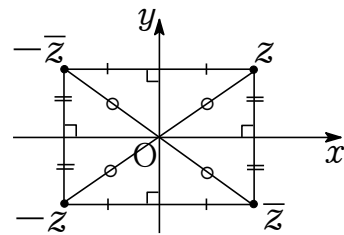
つまり 複素数平面で z, \bar{z} の表す点を
それぞれ P, Q とすると右の図のようになる.



複素数平面と対称移動

複素数 z とその共役な複素数 \bar{z} について、次の対称移動がある。

- ① 点 z を実軸に関して対称移動した点は点 \bar{z}
- ② 点 z を原点に関して対称移動した点は点 $-z$
- ③ 点 z を虚軸に関して対称移動した点は点 $-\bar{z}$



④ $z = a + bi$ (a, b は実数) とすると

$$\bar{z} = a - bi$$

$$-z = -a - bi$$

$$-\bar{z} = -a + bi$$

互いに共役な複素数の和と積

a, b を実数とする.

互いに共役な複素数 $z = a + bi, \bar{z} = a - bi$ について

$$\text{和: } z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \quad \leftarrow (\text{実部}) \text{ の } 2 \text{ 倍}$$

$$\text{積: } z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad \leftarrow (\text{実部})^2 + (\text{虚部})^2$$

これらはともに実数である.

① $z = 3 + 4i, \bar{z} = 3 - 4i$ について

$$\text{和: } z + \bar{z} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{積: } z \bar{z} = 3^2 + 4^2 = 25$$

★複素数の実部と虚部

複素数 z の実部を $\operatorname{Re}(z)$, 虚部を $\operatorname{Im}(z)$ と表すことがある.

このとき

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

① 例 $z = 3 + 4i$ のとき $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = 4$

② 考 $\operatorname{Re}(z) = a$, $\operatorname{Im}(z) = b$ とすると

$$z = a + bi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$z = a + bi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ として } z + \bar{z} = 2a$$

$$\text{よって } a = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ として } z - \bar{z} = 2bi$$

$$\text{よって } b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

複素数が実数になる条件

複素数 z について

$$z \text{ が実数} \iff \bar{z} = z$$

④ z が実数ならば, 点 z は実軸上にある.

⑤ 複素数の実部と虚部より $\text{Im}(z) = 0$ として $\frac{z - \bar{z}}{2i} = 0$

⑥ $z = a$ (a は実数) とすると $\bar{z} = a$ であるから $\bar{z} = z$

複素数が純虚数になる条件複素数 z について

$$z \text{ が純虚数} \iff z + \bar{z} = 0 \text{ かつ } z \neq 0$$

⑧ z が純虚数ならば、点 z は虚軸上にあるので、点 z と点 \bar{z} の中点は原点 0

⑨ 複素数の実部と虚部より $\operatorname{Re}(z) = 0$ として $\frac{z + \bar{z}}{2} = 0$

⑩ $z = bi$ (b は 0 以外の実数) とすると $\bar{z} = -bi$

$$z + \bar{z} = bi + (-bi) = 0$$

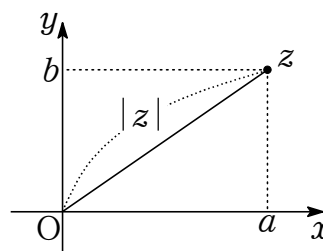
複素数の絶対値

複素数平面において、点 z と原点 O の距離を
複素数 z の絶対値 といひ $|z|$ と表す。

すなわち $z = a + bi$ (a, b は実数) とすると

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

つまり (z の絶対値) $= \sqrt{(z \text{ の実部})^2 + (z \text{ の虚部})^2}$



⑧ $b = 0$ とすると、実数の絶対値になる。

⑨ $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

複素数の絶対値の性質

複素数 z とその共役な複素数 \bar{z} について、次の性質がある。

$$\boxed{1} \quad |z| \geq 0 \quad (\text{等号が成り立つのは } z = 0)$$

$$\boxed{2} \quad |z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$$

$$\textcircled{\text{例}} \quad |3 + 4i| = |-(3 + 4i)| = |3 - 4i| = |-(3 - 4i)| = 5 (> 0)$$

複素数の絶対値の平方

複素数 z とその共役な複素数 \bar{z} について

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

つまり (絶対値の 2 乗) = (複素数とその共役な複素数の積)

① $z = a + bi$ (a, b は実数) とすると $\bar{z} = a - bi$

$$|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

よって $|z|^2 = z\bar{z}$

② $|3 + 4i|^2 = (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 25$

複素数の絶対値の展開

複素数 α , z と共役な複素数 \bar{z} について

$$|z + \alpha|^2 = |z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + |\alpha|^2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{考}} \quad |z + \alpha| &= (z + \alpha)\overline{(z + \alpha)} = (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} \\ &= |z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{例}} \quad |z + (3 + 4i)|^2 = z^2 + (3 - 4i)z + (3 + 4i)\bar{z} + 25$$

複素数の偏角

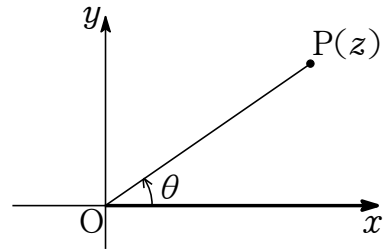
複素数平面で 0 と異なる複素数 z が表す点を P とし

実軸の正の部分^{へんかく}を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とする.

この θ を複素数 z の **偏角** といい 記号 $\arg z$ で表す.

ここで θ は一般角である.

$z = 0$ に対しては 偏角は定義されない.



- ⑧ 補 \arg は偏角を意味する argument からつくられた記号である.
- ⑧ 補 複素数平面では角を度数法で表すこともあるが, 基本的に弧度法で表す.
- ⑧ 補 偏角 θ の 1 つを α とすると $\arg z = \alpha + 2k\pi$ (k は整数) と表される.
- ⑧ 補 偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる.

複素数の極形式

0 と異なる複素数 z は

z の絶対値を $|z| = r$

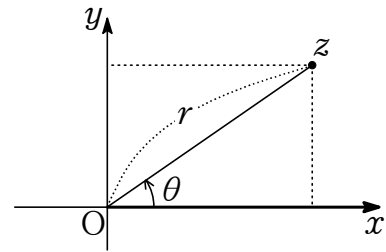
z の偏角を $\arg z = \theta$

として

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表される.

このような表し方を複素数 z の きよくけいしき 極形式 という.



⑧ 点 $\cos \theta + i \sin \theta$ は単位円上にあり, $|\cos \theta + i \sin \theta| = 1$

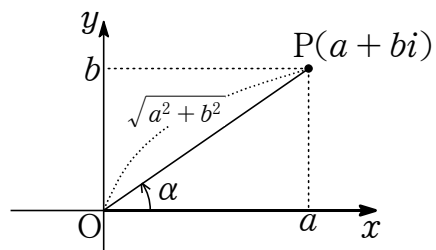
複素数 $a + bi$ を極形式で表す

a, b は実数, $(a, b) \neq (0, 0)$ とする.

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

ただし

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



④ $z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$

⑤ $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg(a + bi) = \alpha$

⑥ $z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

⑦ $3 + 4i = 5 \left(\frac{3}{5} + i \frac{4}{5} \right)$

$= 5(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ (ただし $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$)

共役な複素数の極形式

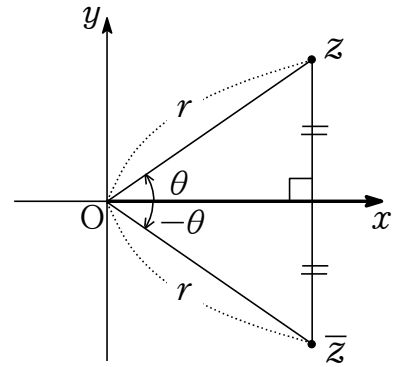
複素数 z を極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ で表す.

このとき 共役な複素数 \bar{z} を極形式で表すと

$$\bar{z} = r \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \}$$

すなわち

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z$$



⑨ $\arg \bar{z} = -\arg z$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

⑩ $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ のとき

$$\bar{z} = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

極形式の複素数の積

2つの複素数 z , w を極形式でそれぞれ

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$w = R(\cos \beta + i \sin \beta)$$

と表すとき, 積 zw は

$$zw = rR\{\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\}$$

すなわち $|zw| = |z||w|$, $\arg zw = \arg z + \arg w$

⑨ $\arg zw = \arg z + \arg w$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

⑩ $zw = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot R(\cos \beta + i \sin \beta)$

$$= rR\{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)\}$$

$$= rR\{\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\} \quad (\because \text{加法定理})$$

⑪ $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

極形式の複素数の商

2つの複素数 z, w を極形式でそれぞれ

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$w = R(\cos \beta + i \sin \beta)$$

と表すとき、商 $\frac{z}{w}$ は

$$\text{商} : \frac{z}{w} = \frac{r}{R} \{ \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) \}$$

すなわち $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$

⑨ $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

⑩ $\frac{z}{w} = \frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{R(\cos \beta + i \sin \beta)}$

$$= \frac{r}{R} \cdot \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta)}{(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta)}$$

$$= \frac{r}{R} \{ (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \}$$

$$= \frac{r}{R} \{ \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) \} \quad (\because \text{加法定理})$$

⑪ $\frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ド・モアブルの定理

整数 n に対して

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

④ ① $n \geq 0$ のとき

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.

(I) $n = 0$ のとき

$$\text{(左辺)} = (\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$$

$$\text{(右辺)} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

(左辺) = (右辺) より $n = 0$ のとき ① は成り立つ.

(II) $n = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) のとき ① が成り立つと仮定すると

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= (\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta) \quad (\because \text{加法定理}) \\ &= \cos \{(k+1)\theta\} + i \sin \{(k+1)\theta\} \end{aligned}$$

すなわち $n = k + 1$ のときも ① は成り立つ.

ゆえに (I), (II) より示された.

このことから 0 以上の整数 n で成り立つことが示された.

④ ② $n < 0$ のとき

$$n = -m \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とおくと $m > 0$ である.

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \{(\cos \theta + i \sin \theta)^m\}^{-1} \\ &= (\cos m\theta + i \sin m\theta)^{-1} \quad (\because m \text{ は正の整数より } \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \\ &= \cos m\theta - i \sin m\theta \\ &= \cos(-n\theta) - i \sin(-n\theta) \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

すなわち負の整数 n で成り立つことが示された.

よって, ①, ② より示された.

④ $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6 = \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

極形式の累乗

複素数 z を極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ で表す.

このとき n を整数として z^n を極形式で表すと

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

すなわち

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z$$

⑨ $\arg z^n = n \arg z$ は両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

⑩ $\left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right\}^6 = 2^6 \left\{ \cos \left(6 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right\}$
 $= 64 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$
 $= 64$

偏角の性質

複素数 z , w , 共役な複素数 \bar{z} の偏角について, 次のことがいえる.

ただし, 両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味する.

$$\boxed{1} \quad \arg \bar{z} = -\arg z$$

$$\boxed{2} \quad \arg zw = \arg z + \arg w$$

$$\boxed{3} \quad \arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$$

$$\boxed{4} \quad \arg z^n = n \arg z \quad (n \text{ は整数})$$

⑧ 補 対数法則と同じ性質

要

複素数の積と商は回転移動を意味する.

中心が原点の回転移動

2つの複素数 z, w が表す点をそれぞれ P, Q とし, $z \neq 0$ とする.

点 $P(z)$ を原点 O を中心に角 θ だけ回転した点を $Q(w)$ とすると

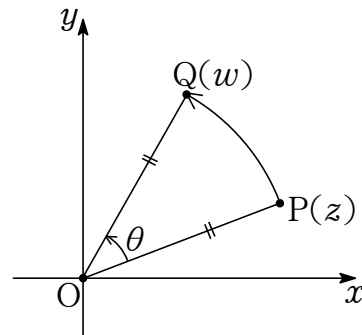
$$w = (\cos \theta + i \sin \theta)z$$

すなわち

$$\frac{w}{z} = \cos \theta + i \sin \theta$$

ここで

$$\left| \frac{w}{z} \right| = 1, \arg \frac{w}{z} = \theta$$



⑧ $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ とすると

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)z &= (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= r\{\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)\} \end{aligned}$$

⑨ \vec{OP} を点 O を中心に θ 回転して \vec{OQ}

イメージは $\vec{OQ} = (\cos \theta + i \sin \theta)\vec{OP}$ (答案には書かない)

すなわち $w = (\cos \theta + i \sin \theta)z$

中心が原点以外の回転移動

3つの複素数 α, z, w を表す点をそれぞれ A, P, Q とし、 $z \neq \alpha$ とする。

点 $P(z)$ を点 $A(\alpha)$ を中心に角 θ だけ回転した点を $Q(w)$ とすると

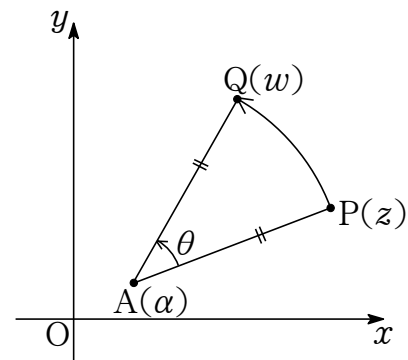
$$w - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(z - \alpha)$$

すなわち

$$\frac{w - \alpha}{z - \alpha} = \cos \theta + i \sin \theta$$

ここで

$$\left| \frac{w - \alpha}{z - \alpha} \right| = 1, \arg \left(\frac{w - \alpha}{z - \alpha} \right) = \theta$$



⑨ \vec{AP} を点 O を中心に θ 回転して \vec{AQ}

イメージは $\vec{AQ} = (\cos \theta + i \sin \theta) \vec{AP}$

始点を O として $\vec{OQ} - \vec{OA} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\vec{OP} - \vec{OA})$ (裏でやる)

すなわち $w - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(z - \alpha)$

中心が原点の回転移動と拡大・縮小

2つの複素数 z, w が表す点をそれぞれ P, Q とし, $z \neq 0$ とする.

点 $P(z)$ を原点 O を中心に角 θ だけ回転し r 倍した点を $Q(w)$ とすると

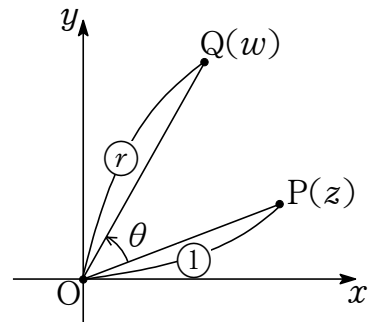
$$w = r(\cos \theta + i \sin \theta)z$$

すなわち

$$\frac{w}{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ここで

$$\left| \frac{w}{z} \right| = r, \arg \frac{w}{z} = \theta$$



⑧ 複素数平面の原点が中心の回転移動 と 複素数平面における複素数の実数倍 を合わせる.

中心が原点以外の回転移動と拡大・縮小

3つの複素数 α, z, w を表す点をそれぞれ A, P, Q とし、 $z \neq \alpha$ とする。
 点 $P(z)$ を点 $A(\alpha)$ を中心に角 θ だけ回転し r 倍した点を $Q(w)$ とすると

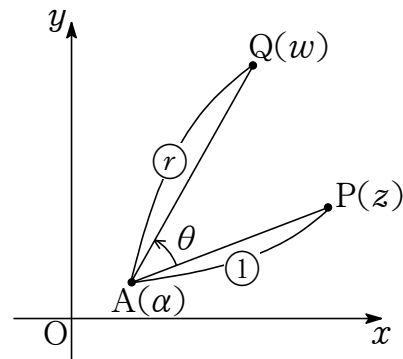
$$w - \alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)(z - \alpha)$$

すなわち

$$\frac{w - \alpha}{z - \alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ここで

$$\left| \frac{w - \alpha}{z - \alpha} \right| = r, \quad \arg \left(\frac{w - \alpha}{z - \alpha} \right) = \theta$$



⑧ 複素数平面の原点が中心の回転移動と拡大縮小で α だけ平行移動する.

複素数平面の3点のなす角

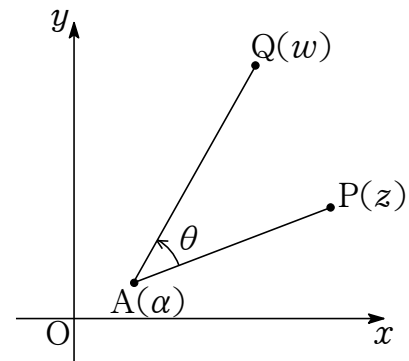
3つの複素数 α , z , w を表す点をそれぞれ A , P , Q とし, $z \neq \alpha$ とする.

\vec{AP} の正方向の半直線 AP を始線としたときの

動径 AQ の表す角を θ として

$$\theta = \arg\left(\frac{w - \alpha}{z - \alpha}\right)$$

とくに $0 \leq \theta \leq \pi$ ならば $\angle PAQ = \theta$



複素数平面の 3 点の位置関係

複素数平面に相異なる 3 点 $A(\alpha)$, $P(z)$, $Q(w)$ があるとき

① 3 点 A, Q, R が一直線上にある $\iff \frac{w-\alpha}{z-\alpha}$ が実数

② 2 直線 AP, AQ が垂直に交わる $\iff \frac{w-\alpha}{z-\alpha}$ が純虚数

⊙ ① $\arg\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right) = k\pi$ (k は整数)

② $\arg\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数)

複素数平面の 4 点の位置関係

複素数平面に相異なる 4 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $P(z)$, $Q(w)$ があるとき

① 2 直線 AB, PQ が平行 $\iff \frac{w-z}{\beta-\alpha}$ が実数

② 2 直線 AB, PQ が垂直に交わる $\iff \frac{w-z}{\beta-\alpha}$ が純虚数

⊙ ① $\arg\left(\frac{w-z}{\beta-\alpha}\right) = k\pi$ (k は整数)

② $\arg\left(\frac{w-z}{\beta-\alpha}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数)

内分点を表す複素数

複素数平面の異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ に対し

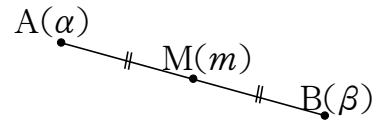
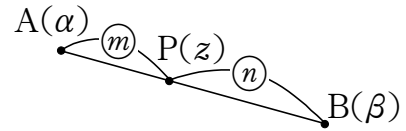
線分 AB を $m : n$ ($m > 0, n > 0$) に内分する点を $P(z)$ とすると, 次が成り立つ.

$$\boxed{1} \quad z - \alpha = \frac{m}{m+n} (\beta - \alpha)$$

$$\boxed{2} \quad z = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}$$

とくに 線分 AB の中点を $M(m)$ とすると

$$m = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



⑧ 原点 $O(0)$ として, ベクトルでイメージする.

$$\boxed{1} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\boxed{2} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

外分点を表す複素数

複素数平面の異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ に対し

線分 AB を $m : n$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$) に外分する点を $Q(w)$ とすると

次が成り立つ.

① $w - \alpha = \frac{m}{m-n} (\beta - \alpha)$

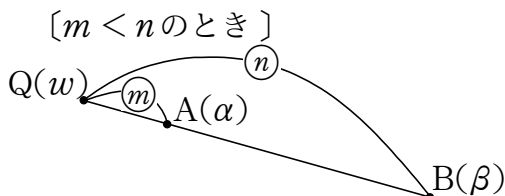
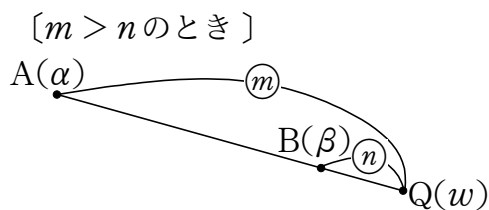
または

$$w - \alpha = \frac{-m}{n-m} (\beta - \alpha)$$

② $w = \frac{(-n)\alpha + m\beta}{m + (-n)}$

または

$$w = \frac{n\alpha + (-m)\beta}{(-m) + n}$$



④ 原点 $O(0)$ として, ベクトルでイメージする.

① $\vec{AQ} = \frac{m}{m-n} \vec{AB} \iff \vec{OQ} - \vec{OA} = \frac{m}{m-n} (\vec{OB} - \vec{OA})$

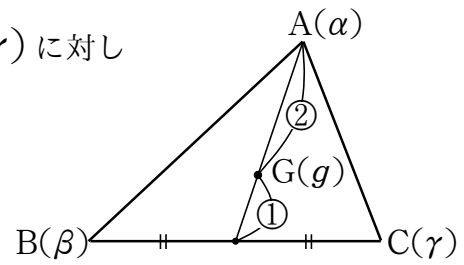
② $\vec{OQ} = \frac{-n\vec{OA} + m\vec{OB}}{m-n} = \frac{n\vec{OA} - m\vec{OB}}{-m+n}$

⑤ 内分点を表す複素数の m を $-m$ あるいは n を $-n$ にかえると外分点になる.

三角形の重心を表す複素数

複素数平面の相異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対し
 $\triangle ABC$ を重心を $G(g)$ とすると次が成り立つ.

$$g = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$



⑧ 原点 $O(0)$ として, ベクトルでイメージする.

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

直線を表す複素数

複素数平面の異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ に対し

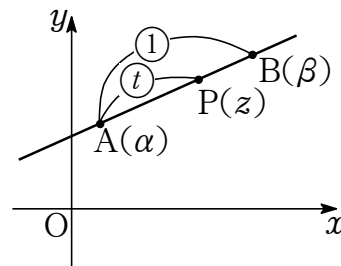
直線 AB を $P(z)$ が表わすとき

t を実数として

① $z = \alpha + t(\beta - \alpha)$

② $z = (1 - t)\alpha + t\beta$

③ $z = p\alpha + q\beta$ かつ $p + q = 1$



④ 考 原点 $O(0)$ として, ベクトルでイメージする.

① $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$

② $\vec{OP} = (1 - t)\vec{OA} + t\vec{OB}$

③ ② で $1 - t = p$, $t = q$ とおいて

$\vec{OA} = p\vec{OA} + q\vec{OB}$ かつ $p + q = 1$

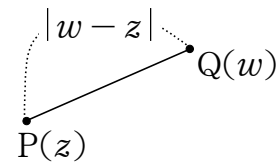
複素数平面の 2 点間の距離

複素数平面に 2 点 $P(z)$, $Q(w)$ がある.

2 点 P , Q を結ぶ線分 PQ の距離は

$$PQ = |z - w| = |w - z|$$

つまり (2 点間の距離) = (2 点を表わす複素数の差の絶対値)



① 2 点 $P(1 + i)$, $Q(3 + 4i)$ の距離は

$$PQ = |(3 + 4i) - (1 + i)| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 13$$

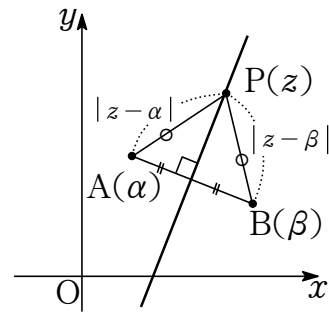
垂直二等分線を表す複素数

複素数平面に異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ がある.

線分 AB の垂直二等分線 を $P(z)$ が表すとき

$AP = BP$ であるから

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$



⑧ 2 点 $A(1)$, $B(i)$ の線分 AB の垂直二等分線 を $P(z)$ が表すとき

$$|z - 1| = |z - i|$$

円を表す複素数

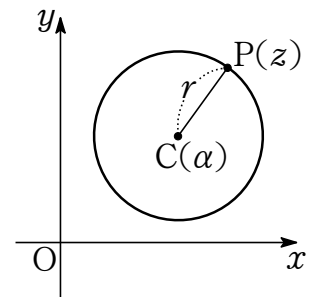
複素数平面において

中心が $C(\alpha)$, 半径 r ($r > 0$) の円を $P(z)$ が表すとき

$CP = r$ であるから

$$\boxed{1} \quad |z - \alpha| = r$$

$$\boxed{2} \quad |z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 = r^2$$



④ $\boxed{1} \quad CP = |z - \alpha|$

$\boxed{2} \quad |z - \alpha|^2 = r^2 \iff (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2$

原点を通る直線に関して 2 点が対称になる条件

複素数平面で原点を $O(0)$, O 以外の点 $A(\alpha)$ があり

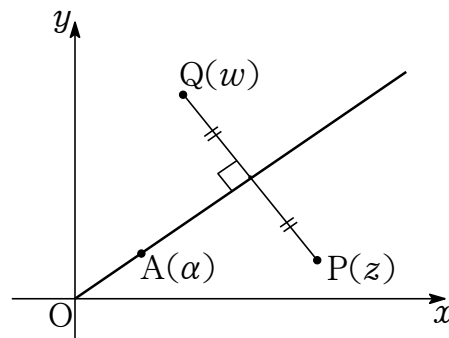
2 点 $P(z)$, $Q(w)$ が直線 OA に関して対称であるとする.

このとき

$$\frac{w}{\alpha} = \overline{\left(\frac{z}{\alpha}\right)}$$

すなわち

$$w = \frac{\alpha \bar{z}}{\alpha} = \frac{\alpha^2 \bar{z}}{|\alpha|^2}$$



⑧ $\left| \frac{w}{\alpha} \right| = \left| \frac{z}{\alpha} \right|$ かつ $\arg \frac{w}{\alpha} = -\arg \frac{z}{\alpha}$ より $\frac{w}{\alpha} = \overline{\left(\frac{z}{\alpha}\right)}$

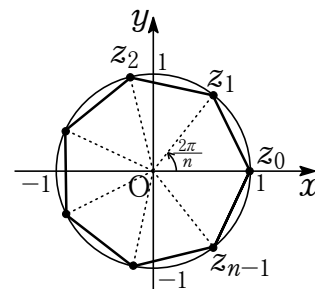
1 の n 乗根

1 の n 乗根 つまり $z^n = 1$ をみたす複素数 z は n 個あり

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

これら n 個の複素数は複素数平面において

単位円上にあり, 正 n 角形の頂点である.



⊙ 考 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi) \dots \dots \textcircled{\star}$

とおくと

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

$z^n = 1$ をみたすので絶対値と偏角を考えて

$$\begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{cases}$$

すなわち $r = 1$

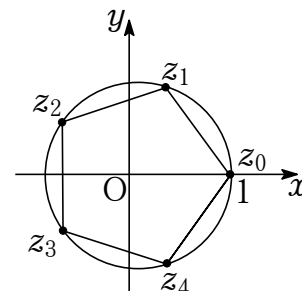
$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \theta = \frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

⊙より $z = z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

⊙ 例 $z^5 = 1$ を満たす複素数は 5 個あり

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

これらは右図のように正五角形の頂点になる.



実数係数の高次方程式と虚数解

n は自然数, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ はすべて実数, $a_n \neq 0$ とする.

実数係数の n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

が虚数解 α をもつならば, 共役な虚数 $\bar{\alpha}$ も解となる.

① $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \dots\dots$ ②

とおく.

② が虚数解 α を解にもつならば

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

が成り立つので

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \bar{0}$$

すなわち

$$\overline{a_n} (\bar{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}} (\bar{\alpha})^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{\alpha} + \overline{a_0} = \bar{0} \quad (\because \text{共役な複素数の性質})$$

ここで $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, 0$ は実数であるから

$$a_n (\bar{\alpha})^n + a_{n-1} (\bar{\alpha})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = 0 \quad (\because z \text{ が実数} \iff \bar{z} = z)$$

よって $\bar{\alpha}$ は ② の解となる.