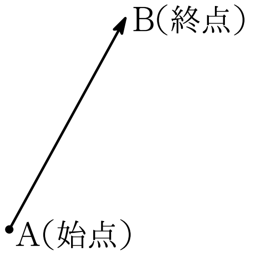
数学C　平面上のベクトル

有向線分とベクトル / ベクトルの表記 / ベクトルの相等 / 逆ベクトル /
ベクトルの加法 / ベクトルの加法の性質 / ベクトルの和分 / 零ベクトル /
零ベクトルの性質 / ベクトルの減法 / ベクトルの差分（始点の変換）/
ベクトルの実数倍 / 実数とベクトルの性質 / ベクトルの平行条件 /
単位ベクトル / 平面ベクトルの１次結合 / 平面上の１次独立なベクトル /
１次独立な平面ベクトルの性質 / 平面ベクトルの１次独立と１次結合 /
１次結合の平面ベクトルの平行条件 / 平面ベクトルの成分表示 /
成分表示の平面ベクトルの相等 / 成分表示の平面ベクトルの大きさ /
平面ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（行ベクトル）/
平面ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（列ベクトル）/
座標平面のベクトルの成分表示と大きさ / ベクトルのなす角 /
ベクトルの内積 / 余弦とベクトル / ベクトルの垂直条件 /
☆ベクトルの平行条件（内積）/ ベクトルの内積の性質 /
ベクトルの内積と大きさの関係 / 平面ベクトルの展開 / ☆三角形と内積 /
☆三角形と内角が鋭角・直角・鈍角になる条件 / ★正射影 /
★ベクトルの内積の図形的意味 / ★正射影ベクトル /
成分表示の平面ベクトルの内積 / 成分表示の平面ベクトルの垂直条件 /
★ベクトルの内積と不等式 / ★成分表示の平面ベクトルの内積と不等式 /
三角形の面積（ベクトル）/ 位置ベクトル / 内分点の位置ベクトル /
外分点の位置ベクトル / 三角形の重心の位置ベクトル /
☆三角形の内心の位置ベクトル / 点が直線上に存在する条件（共線条件）/
直線のベクトル方程式（ベクトルを用いて直線を表す式）/
円のベクトル方程式（ベクトルを用いて円を表す式）/ ★斜交座標 /
平面ベクトルと領域 / 中心が原点の円を媒介変数で表す /
★直線と法線ベクトル /
★座標平面の通る点と法線ベクトルがわかる直線の方程式 /
★座標平面での直線の方程式と法線ベクトル /

有向線分とベクトル



向きをつけた線分を有向線分(ゆうこうせんぶん)という．

有向線分 AB について，

点 A を始点(してん)，点 B を終点(しゅうてん)といい，

線分 AB の長さを有向線分 AB の大きさまたは長さという．

有向線分の位置の違いを無視して，その向きと大きさだけに着目したものを

ベクトルという．

すなわち ベクトルとは向きと大きさをもつ量である．

㊟ 平面上の有向線分が表すベクトルを「平面ベクトル」という．
空間の有向線分が表すベクトルを「空間ベクトル」という．
ここでは，平面ベクトルを考える．

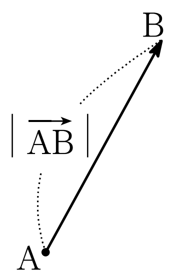
ベクトルの表記

有向線分 AB が表すベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表し，

その大きさを $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ で表す．

また $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$ のように 1 つの文字に矢印をつけて表すこともある．

このとき $\vec{a}$ の大きさは $\left|\vec{a}\right|$



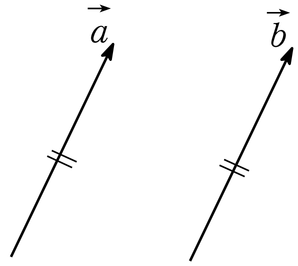
㊟ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は大きさが同じだが，向きが違う．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は始点が A，終点が B の有向線分 AB が表すベクトル
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は始点が B，終点が A の有向線分 BA が表すベクトル

ベクトルの相等

2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が位置に無関係に

同じ向き かつ 大きさが等しいとき

$\vec{a}$と$\vec{b}$は等しいといい $\vec{a}=\vec{b}$ と表す.



補 違う位置にあっても，向きと大きさが等しいならば同じベクトル.

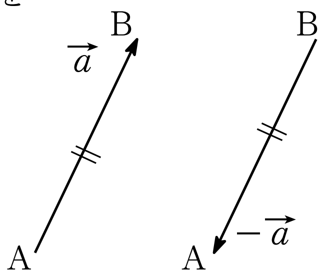
逆ベクトル

ベクトル$\vec{a}$と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを

$\vec{a}$の 逆(ぎゃく)ベクトル といい $-\vec{a}$ と表す.

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると $-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$



㊓ 大きさは等しいので $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|$，$|\vec{a}|=|-\vec{a}|$

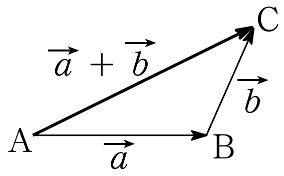
㊓ 大雑把な説明だが，「家から駅に行く」と「駅から家に行く」というような感じ.

ベクトルの加法

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，1 つの点 A をとり

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

となるように点 B，C をとる．



このとき $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい $\vec{a}+\vec{b}$ と表す．

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

㊓ 大雑把な説明だが A(家)，B(銀行)，C(コンビニ) として
「家から銀行へ行く」+「銀行からコンビニに行く」は「家からコンビニに行く」

ベクトルの加法の性質

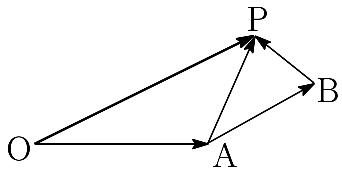
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ （交換法則）
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ （結合法則）

㊓ ベクトルでも文字式と同じようにたし算ができる．

ベクトルの和分

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は任意の点を経由して，次のように和にできる．

1. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$



㊔ ベクトルの加法

㊓ 1 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\square}+\overrightarrow{\square\mathrm{P}}$ と和に分けることができる．
2 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\square}+\overrightarrow{\square\triangle}+\overrightarrow{\triangle\mathrm{P}}$ と和に分けることができる．

零ベクトル

始点と終点がともに点Aのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を 大きさが0のベクトル とし

$\vec{a}$ の 零(れい)ベクトル または ゼロベクトル といい $\vec{0}$ と表す.

すなわち $|\vec{0}|=0$

$\vec{0}$ の向きは考えないものとする.

㊟ $\vec{0}$ と 0 は違う.

零ベクトルの性質

$\boxed{1}$ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

$\boxed{2}$ $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

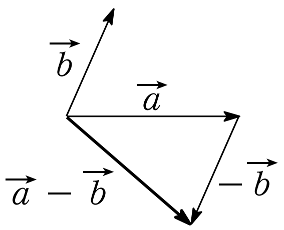
㊫ $\vec{0}$ は数 0 と同じような性質がある.
この性質のおかげでベクトルのひき算もできることになる.

ベクトルの減法

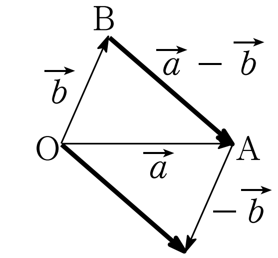
2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して差 $\vec{a}-\vec{b}$ を

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

のように定める．



これは 右上図のようにかくことができる．



このとき $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

㊟補 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

ベクトルの差分（始点の変換）

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の始点を A から O に変えて，次のように差にできる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

つまり 変える始点で（終点）－（始点）

考 ベクトルの減法

補 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\square\mathrm{B}}-\overrightarrow{\square\mathrm{A}}$（□ は変える始点）

例 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$（始点を A から P）

ベクトルの実数倍

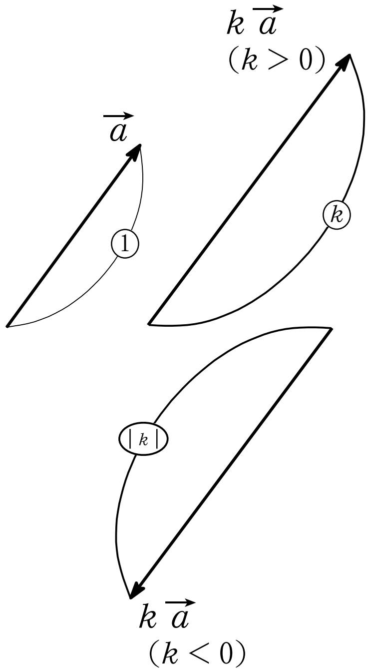
ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\vec{a}$ の k 倍 $k\vec{a}$ は次のように定義する．

$\boxed{1}$ $k > 0$ のとき

$\vec{a}$ と同じ向きで，

大きさが $\left|\vec{a}\right|$ の k 倍であるベクトル

特に　$1\vec{a} = \vec{a}$



$\boxed{2}$ $k < 0$ のとき

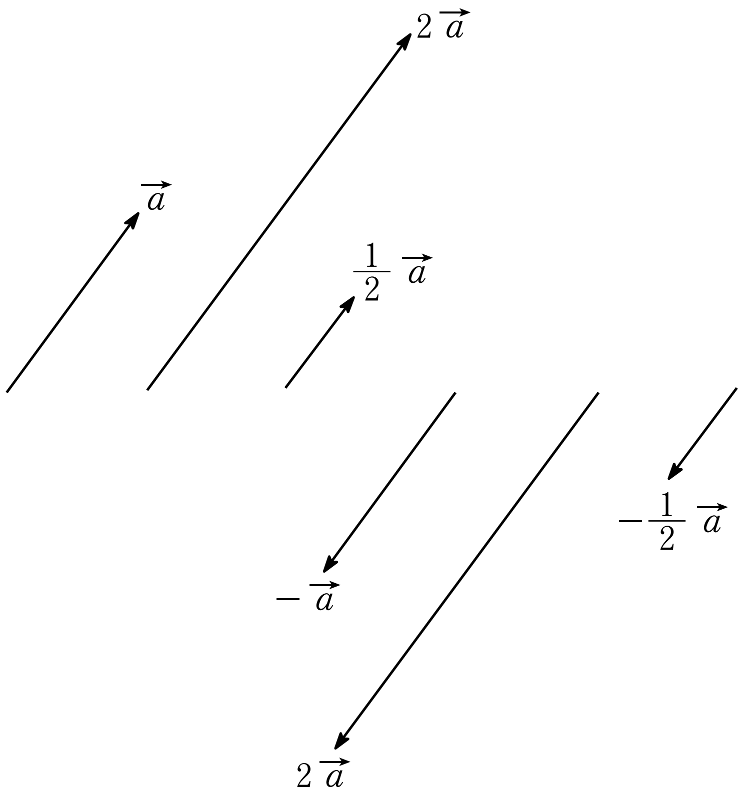
$\vec{a}$ と反対向きで，

大きさが $\left|\vec{a}\right|$ の $|k|$ 倍であるベクトル

特に　$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

$\boxed{3}$ $k = 0$ のとき　$0\vec{a} = \vec{0}$　（零ベクトル）

例



実数とベクトルの性質

x，y，k を実数として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $x\left(y\vec{a}\right)=(xy)\vec{a}$

$\boxed{2}$ $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$　（分配法則）

$\boxed{3}$ $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$　（分配法則）

例 $\boxed{1}$ $2(3\vec{a})=(2\cdot 3)\vec{a}=6\vec{a}$

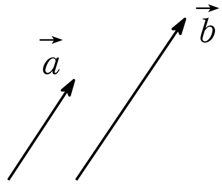
$\boxed{2}$ $(2+3)\vec{a}=2\vec{a}+3\vec{a}$

$\boxed{3}$ $2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

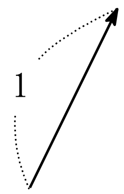
$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在する



㊫ 2つのベクトルが平行ならば，ある実数倍で同じベクトルになる．

単位ベクトル

大きさが1のベクトルを **単位ベクトル**（たんい） という.



$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき

$\boxed{1}$ $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\boxed{2}$ $\vec{a}$ と反対向きの単位ベクトルは $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = -\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

例 $|\vec{a}| = 3$ のとき

$\boxed{1}$ $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{1}{3}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}}{3}$

$\boxed{2}$ $\vec{a}$ と反対向きの単位ベクトルは $-\dfrac{1}{3}\vec{a} = -\dfrac{\vec{a}}{3}$

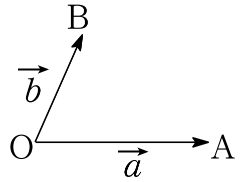
平面ベクトルの1次結合

2つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ に対し

実数 s, t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ と表されることを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **1次結合**（いちじけつごう）という．

㊓「1次結合」の用語は教科書には書かれていないが，便利なので使うことにした．
「1次結合」の一般的な定義は「ベクトルを複数のベクトルの定数倍の和で表すこと」
平面ベクトルは2つのベクトルの実数倍の和で表せる．

平面上の1次独立なベクトル



2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1次独立(いちじどくりつ)であるとは

次の条件を満たすことである．

$\boxed{1}$ $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ （$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は大きさがあり平行ではない）

$\boxed{2}$ $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと 3点 O，A，B は同一直線上にない

$\boxed{3}$ $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと $\triangle\mathrm{OAB}$ が存在する

$\boxed{4}$ 実数 x，y に対し $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ ならば $x = 0$ かつ $y = 0$

補 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ は同値．
$\boxed{4}$ が一般的な定義だが，高校の教科書では $\boxed{1}$ を定義とする．
1次独立を線形独立(せんけいどくりつ)ということもある．
1次独立でないことを1次従属(いちじじゅうぞく)または線形従属(せんけいじゅうぞく)という．

例 $\vec{b} = 2\vec{a}$ となる場合は $\vec{a} \parallel \vec{b}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立ではなく，1次従属である．

1次独立な平面ベクトルの性質

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立，x，y，s，t を実数として次が成り立つ．

1 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

2 $x\vec{a}+y\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{b} \iff \begin{cases} x=s \\ y=t \end{cases}$

考 1（$\Longrightarrow$ について）

$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ ……①

① のとき $y \fallingdotseq 0$ と仮定すると $\vec{b}=-\dfrac{x}{y}\vec{a}$

これは $x=0$ ならば $\vec{b}=\vec{0}$ となり矛盾する．

$x \fallingdotseq 0$ ならば $\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$ であるから $\vec{b} /\!/ \vec{a}$ となり矛盾する．

これらのことから $y=0$ であり ① は $x\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$ であるから $x=0$ である．

（$\Longleftarrow$ について）

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ならば $x\vec{a}+y\vec{b}=0\vec{a}+0\vec{b}=\vec{0}$ である．

2

$$
\begin{aligned}
& x\vec{a}+y\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{b} \\
\iff & (x-s)\vec{a}+(y-t)\vec{b}=\vec{0} \\
\iff & \begin{cases} x-s=0 \\ y-t=0 \end{cases} \quad (\because \vec{a},\vec{b} \text{ は1次独立，} x-s,\ y-t \text{ は実数より} \boxed{1}) \\
\iff & \begin{cases} x=s \\ y=t \end{cases}
\end{aligned}
$$

平面ベクトルの1次独立と1次結合

平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，1次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad (x,\ y \text{ は実数})$$

の形でただ1通りに表される．

参 1次独立な平面ベクトルの性質

補 平面上のベクトル $\vec{p}$ に対して，(x, y) の組がただ1つ決まる．

補 平面ベクトルにおいて，1次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を 基底（きてい） という．
座標平面のすべての点 (x, y) は x 軸，y 軸の2つの軸から表せるが，それと同じで
平面上のすべてのベクトルは1次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せる．

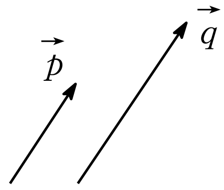
1次結合の平面ベクトルの平行条件

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立，x，y，s，t を0以外の実数として，2つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ が

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$
$$\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表されるとき

$$\vec{p} \parallel \vec{q} \iff x : y = s : t$$



㊜ $\boxed{\text{ベクトルの平行条件}}$

㊡ $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$\vec{q} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$

について

$\vec{q} = 2\vec{p}$

と表せるので $\vec{p} \parallel \vec{q}$

このとき $1 : 2 = 2 : 4$

平面ベクトルの成分表示

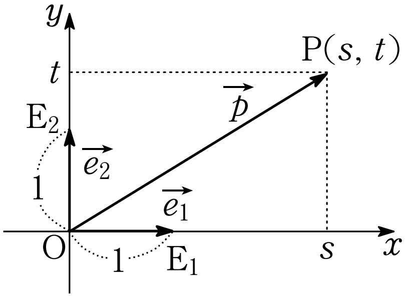
座標平面において，点Oを原点，点 $E_1(1,\ 0)$，$E_2(0,\ 1)$ とする

x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを

座標軸に関する 基本（きほん）ベクトル といい，それぞれ

$$\vec{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{OE_1}},\ \vec{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{OE_2}}$$

とする．



このとき $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ をとると

$$\vec{p}=s\vec{e_1}+t\vec{e_2}$$

とただ1通りで表せて，これを $\vec{p}$ の基本ベクトル表示 という．

さらに

$\vec{p}=(s,\ t)$ または $\vec{p}=\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ のように表し，ベクトル $\vec{p}$ の 成分表示（せいぶんひょうじ） という．

ここで s を $\vec{p}$ の x 成分，t を $\vec{p}$ の y 成分 という．

とくに $\vec{0}$，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の成分表示は　$\vec{0}=(0,\ 0)$，$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$

参 平面ベクトルの1次独立と1次結合

補 教科書ではベクトルの成分表示は横並びで $\vec{p}=(s,\ t)$ とかくことになっている．

しかし，縦並びで $\vec{p}=\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ とかくこともある．

ちなみに横並びのベクトルを行ベクトル，縦並びのベクトルを列ベクトルという．

列ベクトルは計算がみえやすくなるが，分数が入ってくるとわかりにくくもなる．

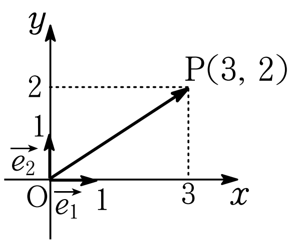
基本的には行ベクトルでよいのかもしれないが，列ベクトルでかく人もよくみかける．

例 点 $\mathrm{P}(3,\ 2)$ として $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3,\ 2)$ と表せる．

$\vec{p}=(3,\ 2)$ は $\vec{e_1}=(1,\ 0)$ は $\vec{e_2}=(0,\ 1)$ を用いて

$(3,\ 2)=3(1,\ 0)+2(0,\ 1)$　すなわち　$\vec{p}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$

とただ1通りで表せる．



これを列ベクトルでかくと

$\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ は $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ は $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を用いて

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　すなわち　$\vec{p}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$

$\vec{p}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ を $\vec{p}$ の基本ベクトル表示といい，

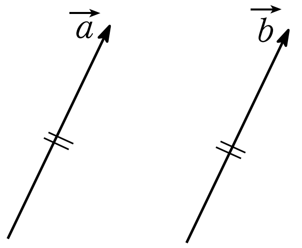
$\vec{p}=(3,\ 2)$ または $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ を $\vec{p}$ の成分表示という．

$\vec{p}$ の x 成分は3，y 成分は2である．

成分表示の平面ベクトルの相等

$\vec{a}=(a,\ b)$，$\vec{b}=(x,\ y)$ のとき

$$\vec{a}=\vec{b} \iff \begin{cases} a=x \\ b=y \end{cases}$$



補 同じ平面ベクトルならば，x 成分と y 成分がともに等しい．

成分表示の平面ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a,\,b)$ のとき

$\vec{a}$ の大きさは $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$

つまり $(\vec{a}\text{ の大きさ})=\sqrt{(x\text{成分})^2+(y\text{成分})^2}$

㊟ 点 $\mathrm{O}(0,\,0)$，$\mathrm{A}(a,\,b)$ として $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\,b)$
$\vec{a}=(a,\,b)$ の大きさは，座標平面の原点Oと点 $\mathrm{A}(a,\,b)$ の距離と同じ．

㊎ $\vec{a}=(2,\,3)$ のとき $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

平面ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（行ベクトル）

$\vec{a}=(a,\ b)$，$\vec{b}=(x,\ y)$，k は実数　のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=(a,\ b)+(x,\ y)=(a+x,\ b+y)$

差：$\vec{a}-\vec{b}=(a,\ b)-(x,\ y)=(a-x,\ b-y)$

実数倍：$k\vec{a}=k(a,\ b)=(ka,\ kb)$

まとめて　s，t を実数として

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s(a,\ b)+t(x,\ y)=(sa+tx,\ sb+ty)$$

例 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 2)+(2,\ 1)=(3+2,\ 2+1)=(5,\ 3)$

差：$\vec{a}-\vec{b}=(3,\ 2)-(2,\ 1)=(3-2,\ 2-1)=(1,\ 1)$

実数倍：$5\vec{a}=5(3,\ 2)=(5\cdot 3,\ 5\cdot 2)=(15,\ 10)$

$5\vec{a}+3\vec{b}=5(3,\ 2)+3(2,\ 1)=(21,\ 13)$

平面ベクトルの和・差・実数倍の成分表示（列ベクトル）

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, k は実数 のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+x\\b+y\end{pmatrix}$

差：$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-x\\b-y\end{pmatrix}$

実数倍：$k\vec{a}=k\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$

まとめて s, t を実数として

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa+tx\\sb+ty\end{pmatrix}$$

例 $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ のとき

和：$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\\2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

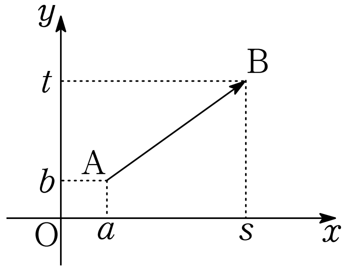
差：$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

実数倍：$5\vec{a}=5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot3\\5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

$5\vec{a}+3\vec{b}=5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\13\end{pmatrix}$

座標平面のベクトルの成分表示と大きさ

座標平面の2点 A$(a,\ b)$，B$(s,\ t)$ のとき



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s-a,\ t-b)$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(s-a)^2+(t-b)^2}$

つまり $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{の大きさ}\right)=\sqrt{(x\text{座標の差})^2+(y\text{座標の差})^2}$

㊟考 点 O$(0,\ 0)$ として $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b), \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s,\ t)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-a,\ t-b)$

補 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは2点 A，B の距離

例 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 2)$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-1,\ 2-1)=(2,\ 1)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

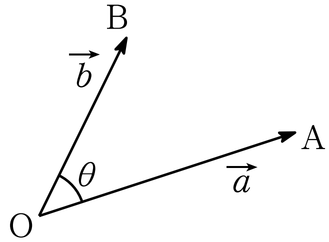
ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点 A，B をとる．

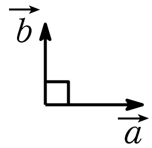
このとき $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ \left(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ\right)$ を

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **なす角** という．

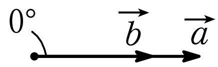


とくに

$\boxed{1}$ $\theta=90^\circ$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **垂直** であるといい $\vec{a}\perp\vec{b}$ とかく．

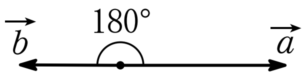


$\boxed{2}$ $\theta=0^\circ$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きに平行であり，



$\theta=180^\circ$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は反対向きに平行であるが，

これらを $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ とかく．



㊗ ベクトルのなす角とは始点をくっつけてできる角のこと．
角の表し方は弧度法もあるが，教科書では度数法を用いていた．
度数法の $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ は弧度法ならば $0 \leqq \theta \leqq \pi$

ベクトルの内積

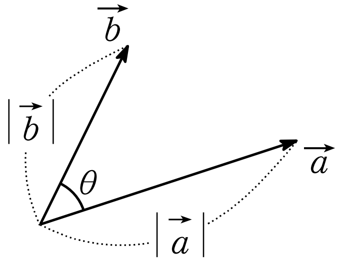
1 $\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のとき

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

2 $\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ として

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

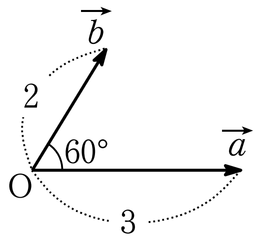


補 教科書での定義である．
$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積という．
$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のとき，なす角は定まらないが，内積は 0 と定める．

注 ベクトルの内積はベクトルではなく実数である．

例 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3\cdot2\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$

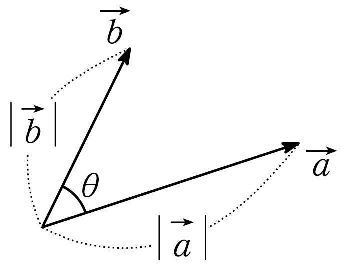


余弦とベクトル

$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$



考 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を変形して $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

例 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ とすると

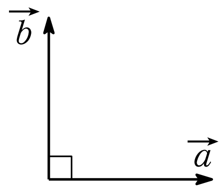
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



考 $\vec{a} \perp \vec{b}$ となるのは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $90°$ であるから $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90° = 0$

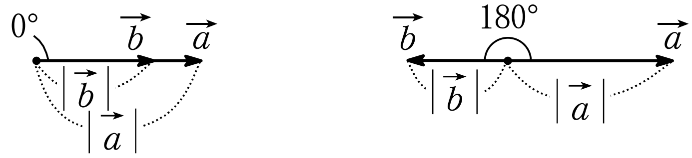
注 $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ となるが $\vec{a} \perp \vec{b}$ ではないので $\Longleftarrow$ は成り立たない.

話 大学の数学では $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも $\vec{a} \perp \vec{b}$ とし
「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する」としている.
本当は $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ は気にしなくてよいが，高校の範囲では注意する.

☆ベクトルの平行条件（内積）

$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \text{ または } \vec{a}\cdot\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$



㊀ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ となるのは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 0° または 180° であるから

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 0^\circ = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ ← $\cos 0^\circ = 1$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 180^\circ = -\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ ← $\cos 180^\circ = -1$

㊟ $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| = 0$ となるが $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ではないので $\Longleftarrow$ は成り立たない.

ベクトルの内積の性質

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ （交換法則）

2 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ （分配法則）

3 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ （分配法則）

4 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$ （分配法則）

5 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$ （k は実数）

補 ベクトルの内積は文字式のかけ算と同じ性質がある．

ベクトルの内積と大きさの関係

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$$

つまり　同じベクトルの内積はそのベクトルの大きさの2乗

考 あ $\vec{a}=\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=0$$
$$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{0}\right|^2=0$$

ゆえに $0=0$ で成り立つ．

い $\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は $0°$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0°=\left|\vec{a}\right|^2$$

よって，あ，い より示された．

平面ベクトルの展開

x，y を実数として

$$\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|^2=x^2\left|\vec{a}\right|^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2\left|\vec{b}\right|^2$$

㊂ $\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|^2=(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})$ （∵ $\boxed{\text{ベクトルの内積と大きさの関係}}$）

$=x^2\vec{a}\cdot\vec{a}+xy\vec{a}\cdot\vec{b}+xy\vec{b}\cdot\vec{a}+y^2\vec{b}\cdot\vec{b}$ （∵ 分配法則）

$=x^2|\vec{a}|^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2|\vec{b}|^2$

㊢ $|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=9\left|\vec{a}\right|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$

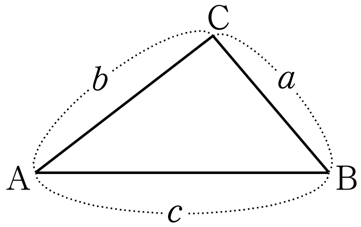
☆三角形と内積

$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ となる $\triangle\mathrm{ABC}$ について

1 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

2 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$

3 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$



考 1 $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

ゆえに　$a^2=b^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+c^2$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

2 3 も同様.

別 1 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\angle\mathrm{BAC}$

$$=cb\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$ （∵△ABCに余弦定理）

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

2 3 も同様.

補 三角形の 1 つの頂点を始点，残り 2 つの頂点を終点とするベクトルの内積は，3 辺の長さを用いて表せる.

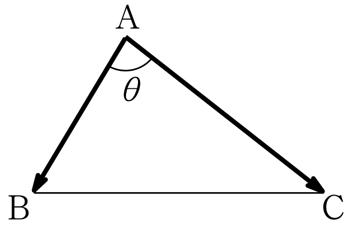
三角形の内角が鋭角・直角・鈍角になる条件

$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とする $\triangle\mathrm{ABC}$ において

$\boxed{1}$ θ が 鋭角 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}>0$

$\boxed{2}$ θ が 直角 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\boxed{3}$ θ が 鈍角 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}<0$



考 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$

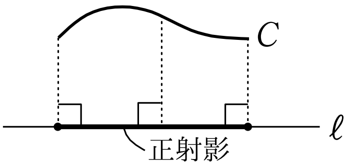
$\boxed{1}$ θ が鋭角 $\iff \cos\theta>0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}>0$

$\boxed{2}$ θ が直角 $\iff \cos\theta=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$（垂直条件）

$\boxed{3}$ θ が鈍角 $\iff \cos\theta<0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}<0$

正射影

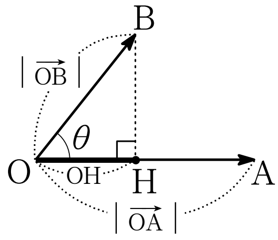
図形 C 上の任意の点から直線 ℓ に下ろした垂線の足となる点全体を図形 C から直線 ℓ 上への **正射影**（せいしゃえい）という．



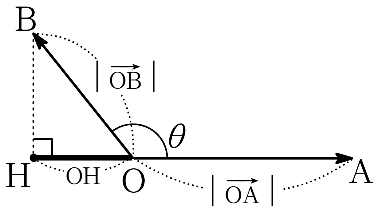
㊓ 漢字の通りで，直線 ℓ の鉛直方向から図形 C に光をあててできる影のこと．

ベクトルの内積の図形的意味

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq \vec{0}$ とする．
線分 OB の直線 OA 上への正射影を OH として
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,\mathrm{OH}$$



ただし　$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$　は符号付き長さで

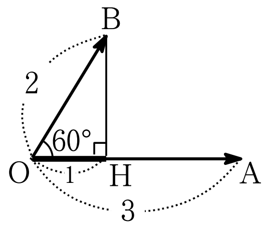
$$\mathrm{OH} = \begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| & (0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ) \\ -|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| & (90^\circ < \theta \leqq 180^\circ) \end{cases}$$

つまり（$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積）＝（$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$の長さ）×（正射影 OH の符号付き長さ）

補 符号付き長さとは，負の長さも考える長さのこと．
$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$　は $\cos\theta < 0$ ならば OH は負になる．
$\cos\theta = 0$ すなわち $\theta = 90^\circ$ ならば $\mathrm{OH} = 0$

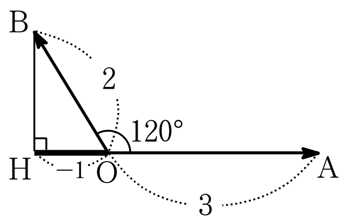
例 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を 60° とする．
線分 OB の直線 OA 上への正射影を OH とすると

$$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 60^\circ$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\mathrm{OH}$$
$$= 3 \cdot 1$$
$$= 3$$



例 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を 120° とする．
線分 OB の直線 OA 上への正射影を OH とすると

$$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 120^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \leftarrow \mathrm{OH} = -|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 120^\circ$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\mathrm{OH}$$
$$= 3 \cdot (-1)$$
$$= -3$$

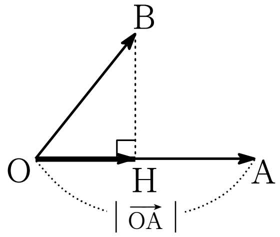


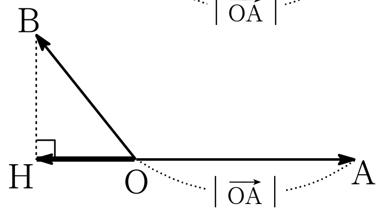
正射影ベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq \vec{0}$ とする．

線分OBの直線OA上への正射影を線分OHとして

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上への **正射影ベクトル** という．





このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

つまり（正射影ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$）$= \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{と}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{の内積})}{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{の大きさの2乗})}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

考 点Hは直線OA上にあるので，実数 k を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ……☆

と表せる．

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

このとき

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$　であるから　$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

これより　$k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$　すなわち　$k = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}$

よって ☆ から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

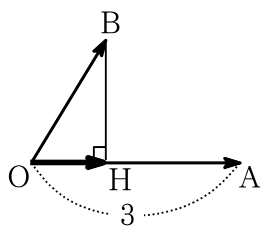
別 内積の図形的意味 から $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\mathrm{OH}$ となるので $\mathrm{OH} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$

$$k = \frac{\mathrm{OH}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}$$

例 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上への正射影ベクトルとすると

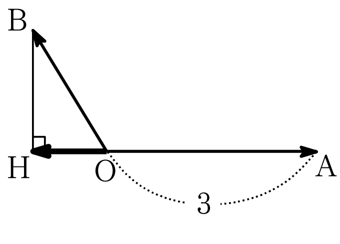
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$



例 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -1$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上への正射影ベクトルとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$



成分表示の平面ベクトルの内積

$\vec{a}=(a,\ b)$，$\vec{b}=(x,\ y)$ のとき

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by$

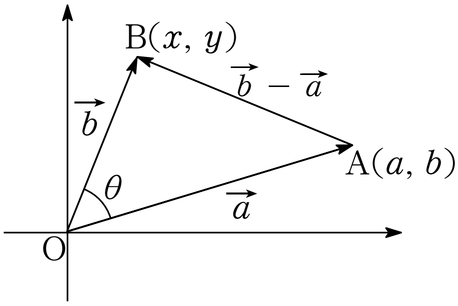
考 あ $\vec{a}=0$ または $\vec{b}=0$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

このとき $(a,\ b)=(0,\ 0)$ または $(x,\ y)=(0,\ 0)$ であるから $ax+by=0$

い $\vec{a}\neq 0$ かつ $\vec{b}\neq 0$ のとき

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ かつ $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$



原点Oを $\vec{a}$，$\vec{b}$ の始点となるように座標軸を設定すると

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)$

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y)$

とおけて

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x-a,\ y-b)$

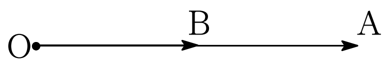
このとき $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とする．

$0^\circ<\theta<180^\circ$ ならば，$\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を用いると

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta$ ……①

$\theta=0^\circ$ ならば，$\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ であり

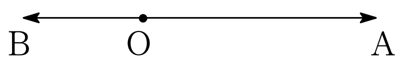
$\mathrm{AB}^2=|\mathrm{OA}-\mathrm{OB}|^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$



これより ① は $\theta=0^\circ$ のときも成り立つ．

$\theta=180^\circ$ ならば，$\cos\theta=\cos 180^\circ=-1$ であり

$\mathrm{AB}^2=|\mathrm{OA}+\mathrm{OB}|^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2+2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$



これより ① は $\theta=180^\circ$ のときも成り立つ．

これらのことから ① は $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のときに成り立ち

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$

すなわち

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+x^2+y^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

ゆえに $\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by$

よって，あ，い より示された．

例 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき

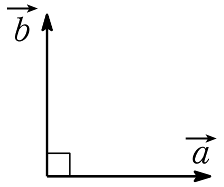
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 5+2\cdot 1=17$

成分表示の平面ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ とする.

$\vec{a}=(a,\ b),\ \vec{b}=(x,\ y)$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff ax+by=0$$



考 ベクトルの垂直条件

考 $\vec{a} \perp \vec{b}$ となる条件は $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$

例 $\vec{a}=(2,\ 3)$ と $\vec{b}=(x,\ 2)$ が垂直ならば

$2x+3\cdot 2=0$

よって　$x=-3$

★ベクトルの内積と不等式

2つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ について

$$\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)^2 \leqq \left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2$$

等号が成り立つのは $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=\vec{0}$ または $\vec{p} /\!/ \vec{q}$

考 あ $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=0$ のとき

$(\text{左辺})=\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)^2=0$

$(\text{右辺})=\left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2=0$

すなわち（左辺）＝（右辺）である．

い $\vec{p}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{q}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{p}$，$\vec{q}$ のなす角を θ（$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$）とすると

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)^2 &= \left(\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\cos\theta\right)^2\\ &= \left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2\cos^2\theta\\ &\leqq \left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2 \quad (\because \cos^2\theta \leqq 1)\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $\cos^2\theta=1$ であるから $\cos\theta=\pm1$

すなわち $\theta=0^\circ$ または $\theta=180^\circ$ であるから $\vec{p} /\!/ \vec{q}$

よって，あ，い より示された．

★成分表示の平面ベクトルの内積と不等式

$\vec{p}=(a,\,b)$，$\vec{q}=(x,\,y)$ のとき

$$\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)^2 \leqq \left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2$$

つまり

$$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

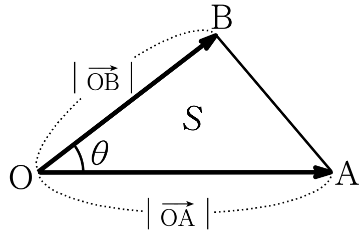
等号が成り立つのは $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=\vec{0}$ または $\vec{p} /\!/ \vec{q}$

すなわち $(a,\,b)=(0,\,0)$ または $(x,\,y)=(0,\,0)$ または $a:b=x:y$

考 コーシー・シュワルツの不等式

三角形の面積（ベクトル）

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ となる $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする.



$\boxed{1}$ $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\theta$

$\boxed{2}$ $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$

$\boxed{3}$ $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(c,\ d)\end{cases}$ ならば　$S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

㊫ $\boxed{2}$

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\sin^2\theta}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2(1-\cos^2\theta)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\cos\theta\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\end{aligned}$$

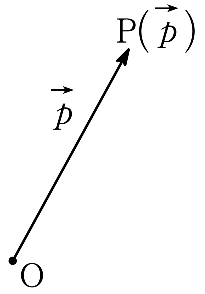
$\boxed{3}$ $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(c,\ d)\end{cases}$ ならば $\boxed{2}$ より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2-\left\{(ac)^2+2abcd+(bd)^2\right\}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(ad)^2-2abcd+(bc)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}\\
&=\frac{1}{2}|ad-bc|\end{aligned}$$

位置ベクトル

平面上または空間内に定点 O をとると，任意の点 P の位置は

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ によって定まる．



この $\vec{p}$ を O を基準とする点 P の 位置（いち）ベクトル という．

点 P の位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを $\mathrm{P}(\vec{p})$ のように表す．

とくに 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$

補 「位置ベクトル」は始点を同じものにして，終点が位置を決めるベクトル．

座標平面だと原点 O が基準になるように，平面ベクトルでも基準になる点を設定する．
その基準になる点を始点とする．

注 ベクトルで位置を考えるときは，矢印の先っぽの点（終点）だけを考える．
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とあれば，線分 OP ではなく点 P のみを考える．

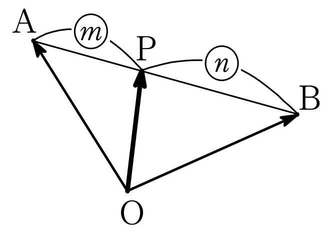
内分点の位置ベクトル

線分 AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点を P とすると，次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$

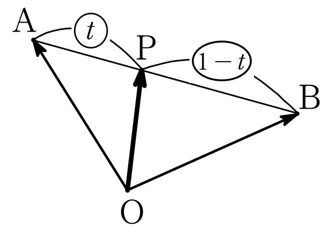
$=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



とくに　線分 AB を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とすると

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

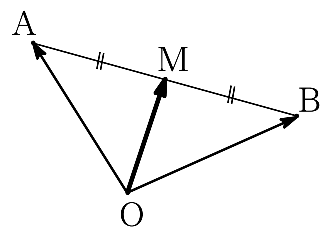


また　線分 AB を $1:1$ に内分する点
つまり　線分 AB の中点を M とすると

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



考 $\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で始点を O とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

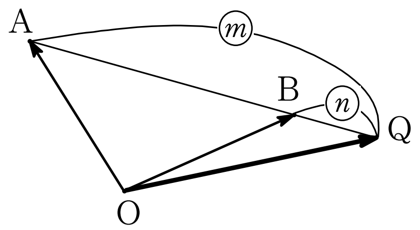
すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1-\dfrac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

外分点の位置ベクトル

線分 AB を $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m \fallingdotseq n)$ に外分する点を Q とすると
次が成り立つ.

〔$m>n$ のとき〕

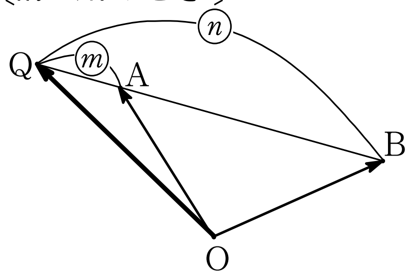


$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

あるいは

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{-m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

〔$m<n$ のとき〕



$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{(-n)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+(-n)}$

$=\dfrac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

あるいは

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{(-m)+n}$

$=\dfrac{n}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{-m}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

とくに $\dfrac{m}{m-n}=t$ とすると

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

考 $m>n$ のとき

$\boxed{1}$ $\mathrm{AB}:\mathrm{AQ}=(m-n):m$ より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で始点を O として

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{m}{m-n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\dfrac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

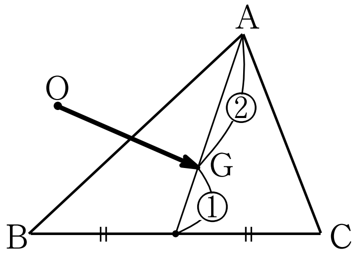
$=\dfrac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$m<n$ のときも同様

補 $\boxed{\text{内分点の位置ベクトル}}$ の「n を $-n$」あるいは「m を $-m$」とすると外分点

三角形の重心の位置ベクトル

△ABC の重心を G とすると，次が成り立つ．



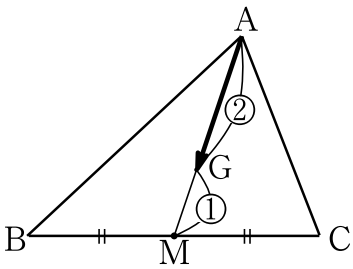
$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

考 $\boxed{1}$ 線分 AB の中点を M とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で始点を O として

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ で始点を G として

$$-\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

別 $\boxed{2}$ で始点を G として

$$-\overrightarrow{\mathrm{GO}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)$$

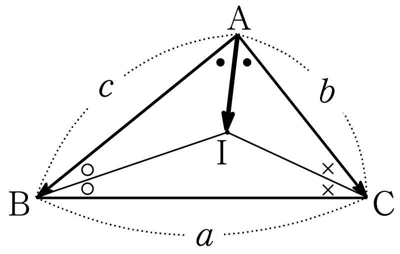
よって $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

☆三角形の内心の位置ベクトル

$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c$ となる △ABC の内心を I とすると，次が成り立つ．

1 $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$



2 $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$

考 1 直線 AI は ∠BAC の二等分線より

BD : DC = AB : AC = $c:b$ であるから

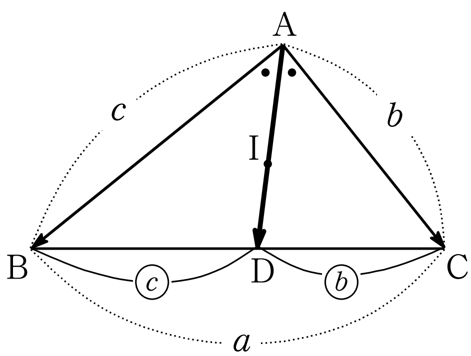
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{c+b}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{c+b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……①

$\mathrm{BD}=\dfrac{c}{c+b}\mathrm{BC}=\dfrac{ca}{c+b}$

直線 BI は ∠ABC の二等分線より

$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=c:\dfrac{ca}{b+c}$

$=(b+c):a$



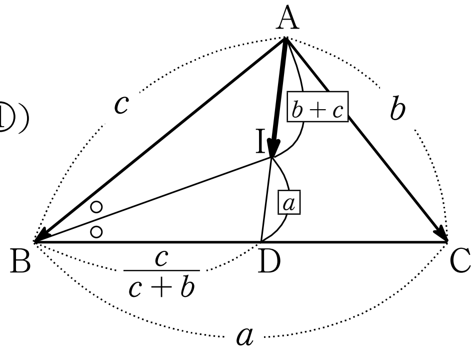
よって

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=\dfrac{b+c}{a+b+c}\left(\dfrac{b}{c+b}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{c+b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ (∵①)

$=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$



2 1 で始点を O として

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\dfrac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

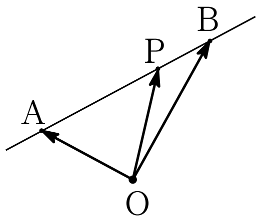
すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$

点が直線上に存在する条件（共線条件）

異なる2点A，Bがあり，点Oは直線AB上にない点とする．

点Pが直線AB上に存在する条件は次である．



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t が存在する．

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t が存在する．

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 t が存在する．

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $x+y=1$ となる実数 x，y が存在する．

考 $\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ （$\because$ $\boxed{1}$）

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ で始点をOとすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

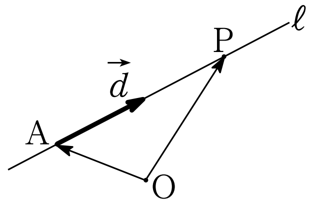
すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ で $1-t=x$，$t=y$ とおくと $x+y=(1-t)+t=1$

直線のベクトル方程式（ベクトルを用いて直線を表わす式）

点Aを通り，$\vec{0}$ でない $\vec{d}$ に平行な直線を ℓ とする．

ℓ を点Pが表すとき，t を実数として



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{d}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$

と表せる．

これを直線の**ベクトル方程式**といい，

$\vec{d}$ を方向ベクトル，t を媒介変数（ばいかいへんすう）という．

考 $\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \vec{d}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{d}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ （$\because\boxed{1}$）

補 通る点1つと直線の方向がわかれば，直線は立式できる．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$（通る点の位置ベクトル）＋（実数）（方向ベクトル）

と表せる．

補 平面でも空間でも同様に立式できる．

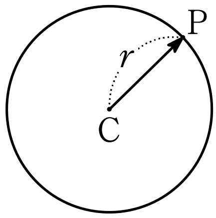
円のベクトル方程式（ベクトルを用いて円を表わす式）

平面上で

中心が点 C，半径が r $(r>0)$ の円を点 P が表すとき

$\boxed{1}$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$

$\boxed{2}$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = r$



と表せる．

これを 円の**ベクトル方程式** という．

㊫ $\boxed{1}$ 中心 C と点 P の距離が r

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で始点を O にする．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - (\text{中心の位置ベクトル})\right| = (\text{半径})$

と表せる．

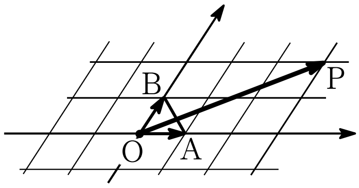
㊥「平面上」を「空間内」にすると球のベクトル方程式になる．

★斜交座標

平面において

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は1次独立，x，y を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



と表されるならば

点Pは O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) とする座標平面上の点 P(x, y)

とみなすことができる．

考 直交座標の座標軸を斜めにしても比の関係は保つ．
1つの実数の組 (x, y) に対して1つの点Pが1対1対応する．
x，y が実数全体を動くとき，点Pは平面上のすべての点を表すことができる．

例 $(x, y)=(0, 0)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+0\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$ であるから $\mathrm{P}=\mathrm{O}$
$(x, y)=(1, 0)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+0\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから $\mathrm{P}=\mathrm{A}$
$(x, y)=(0, 1)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから $\mathrm{P}=\mathrm{B}$

平面ベクトルと領域

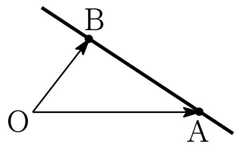
平面において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立，x，y を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表されるならば，次のように x，y の条件に対して 点 P の存在範囲がわかる．

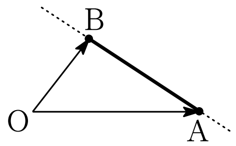
$\boxed{1}$ $x + y = 1$

$\iff$ 点 P は直線 AB 上



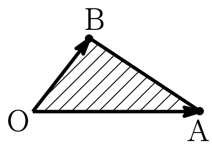
$\boxed{2}$ $x + y = 1$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

$\iff$ 点 P は線分 AB 上



$\boxed{3}$ $x + y \leqq 1$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

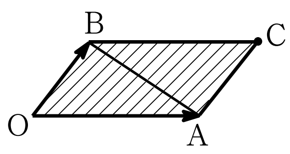
$\iff$ 点 P は三角形 ABC の周または内部



$\boxed{4}$ $0 \leqq y \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として点 P は平行四辺形 OACB の周または内部

（点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形の周または内部）

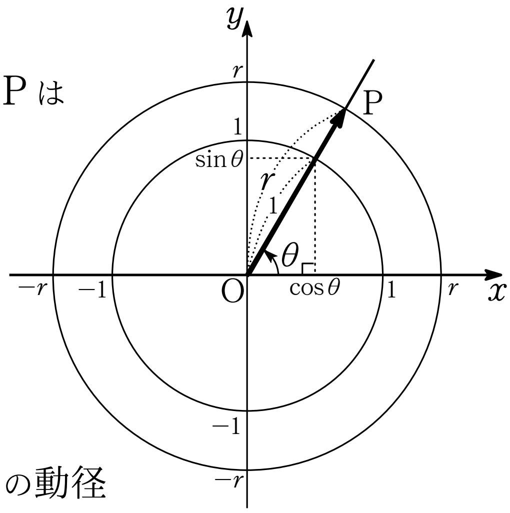


中心が原点の円を媒介変数で表す

座標平面で

原点 O を中心とする半径 r $(r>0)$ の円上の点 P は

次のように表せる．



1 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

2 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r(\cos\theta,\ \sin\theta)$

ここで

半直線 OP は x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径

㊗補 $r=1$ ならば単位円なので $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$

これを r 倍する．

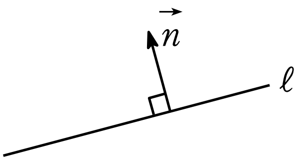
例 $x^2+y^2=9$ 上の点 P は

1 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ と表せる．

2 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せる．

★直線と法線ベクトル

右図の $\overrightarrow{n}$ のように，直線 ℓ と垂直な $\overrightarrow{0}$ でないベクトルを直線 ℓ の 法線(ほうせん)ベクトル という.



★座標平面の通る点と法線ベクトルがわかる直線の方程式

$(a, b) \neq (0, 0)$ とする．

座標平面で

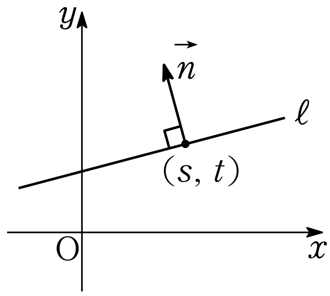
点 (s, t) を通り，法線ベクトルの 1 つが $\vec{n} = (a, b)$

である直線の方程式は

$$a(x-s)+b(y-t)=0$$

すなわち

$$ax+by+c=0 \quad \text{ただし} \quad c=-as-bt$$



㊟ 点 $\mathrm{A}(s, t)$，直線上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-s, y-t)$

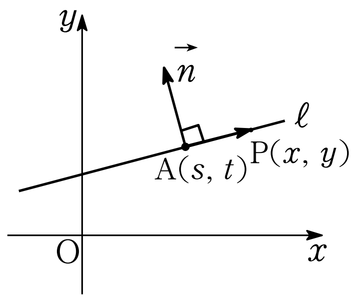
$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$ であるから

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

これより $a(x-s)+b(y-t)=0$

展開して $ax+by-as-bt=0$

$c=-as-bt$ とおいて $ax+by+c=0$



㋑ $\vec{n} = (2, 3)$ に垂直で点 $(1, 4)$ を通る直線の方程式は

$2(x-1)+3(y-4)=0$ すなわち $2x+3y-14=0$

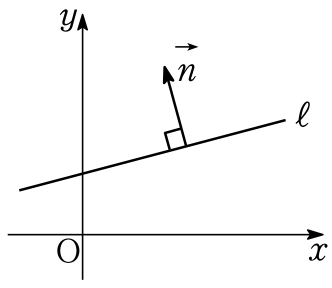
★座標平面での直線の方程式と法線ベクトル

a, b, c は定数，$(a, b) \neq (0, 0)$ とする．

座標平面で直線 ℓ の方程式が

$$\ell : ax+by+c=0$$

ならば $\vec{n} = (a, b)$ は ℓ の法線ベクトルの 1 つ．



㋑ 直線 $2x+3y-14=0$ の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると，その 1 つに $\vec{n} = (2, 3)$ がある．