数学B　数列

数列／ 有限数列と無限数列／ 数列の表記／ 等差数列／ 等差数列の一般項／
☆等差数列の一般項 Ⅱ／ 等差数列の和／ ☆等差数列の和 Ⅱ／ 等比数列／
等比数列の一般項／ 等比数列の一般項 Ⅱ／ 等比数列の和／
等比数列の和 Ⅱ／ 等差中項／ 等比中項／ 定数数列／ 和の記号 $\sum$／
$\sum$ の基本性質／ $\sum$ の性質／ 累乗の和の公式／ 指数関数形の和の公式／
階差と和／ ☆ $\sum$ の変換／ 等差数列と等比数列の積の和／
数列の和と一般項の関係／ 階差数列／ 階差数列と一般項／
群数列の解法／ 座標平面で格子点の個数を求める解法／ 漸化式／
定数数列の漸化式／ 等差数列の漸化式／ 等比数列の漸化式／
等比数列の漸化式の等式変形／ 漸化式 $a_{n+1}=a_n+b_n$／
漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$／ ☆漸化式 $a_{n+1}=pa_n+$（n の 1 次式）／
★漸化式 $a_{n+1}=pa_n+$（n の整式）／ ☆漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q^n$／
☆漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$／ ★漸化式 $a_{n+1}=f(n)a_n$／
☆漸化式 $a_{n+2}+p\,a_{n+1}+q\,a_n=0$ を解く手順／
☆連立漸化式／ 対称性のある連立漸化式／ 数学的帰納法

数列

数を一列に並べたものを **数列**（すうれつ） といい，並べられた各数を数列の **項**（こう） という.

数列の項は 最初の項から順に **第 1 項**（だいいちこう），**第2項**（だいにこう），**第 3 項**（だいさんこう），… という.

とくに 最初の項を **初項**（しょこう） といい，n 番目の項を **第 n 項**（だいエヌこう） という.

有限数列と無限数列

$\boxed{1}$ 項の個数が有限である数列を **有限数列**（ゆうげんすうれつ） といい

項の個数を **項数**（こうすう），最後の項を **末項**（まっこう） という.

$\boxed{2}$ 項の個数が限りなく続く数列を **無限数列**（むげんすうれつ） という.

例 $\boxed{1}$ 1 桁の奇数を小さい順に並べた数列 1, 3, 5, 7, 9 は有限数列で，項数は 5，末項は 9

$\boxed{2}$ 奇数を小さい順に並べた数列 1, 3, 5, 7, 9, … は無限数列

数列の表記

数列を一般的に表すには

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のようにかき，この数列を $\{a_n\}$ のように表記することがある.

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n の式で表し，これを数列 $\{a_n\}$ の **一般項**（いっぱんこう） という.

例 数列 $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$ を $\{a_n\}$ とすると

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ \cdots,\ a_n = 2n$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $2n$

要

数列 $\{a_n\}$ の一般項は定義域が自然数の関数 $f(n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と同じ意味

考 $a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \cdots,\ a_n = f(n)$

n を決めると a_n の値が 1 つ定まる関係である.

補 第 0 項を a_0 として $a_0 = f(0)$ とすることもある.

等差数列

数列 $\{a_n\}$ において，各項に一定の数 d を加えると次の項が得られるとき

この数列を **等差数列**（とうさすうれつ）といい d をその **公差**（こうさ）という．

$$a_n \xrightarrow{+d} a_{n+1}$$

この数列は次の関係式を満たす．

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} - a_n = d$$

補 差が等しい数列

等差数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ を第 1 項 $a_1 = a$，公差 d の等差数列とするとき

$$a_n = a + d(n-1)$$

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3, \quad \cdots \quad \xrightarrow{+d} a_n$$

つまり

（等差数列の第 n 項）＝（第 1 項）＋（公差）×$(n-1)$

考 第 1 項 $a_1 = a$ に $a_1{}_\wedge a_2{}_\wedge a_3{}_\wedge\cdots{}_\wedge a_n$ の間 $_\wedge$ の $(n-1)$ 個の公差 d を加える

考 点 $(1, a)$ を通り，傾き d の直線の方程式を求める．

補 $d \fallingdotseq 0$ ならば a_n は n の 1 次式

例 $a_1 = 3$，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

話 個人的には $a_n = d(n-1) + a$ と表したいが，教科書に合わせた．

★等差数列の一般項 Ⅱ

数列 $\{a_n\}$ を第 k 項 $a_k = a$，公差 d の等差数列とするとき

$$a_n = a + d(n-k)$$

つまり

（等差数列の第 n 項）＝（第 k 項）＋（公差）×$(n-k)$

考 第 k 項 $a_k = a$ に $a_k{}_\wedge a_{k+1}{}_\wedge a_{k+2}{}_\wedge\cdots{}_\wedge a_n$ の間 $_\wedge$ の $(n-k)$ 個の公差 d を加える

考 点 (k, a) を通り，傾き d の直線の方程式を求める．

例 $a_5 = 11$，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 11 + 2(n-5) = 2n + 1$$

例 $a_0 = 1$，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + 2(n-0) = 2n + 1$$

等差数列の和

初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の項の和を S とすると

$$S=\underbrace{a+\cdots+\ell}_{n\text{ 個}}=\frac{n}{2}(a+\ell)$$

つまり

$$(\text{等差数列の和})=\frac{(\text{項数})}{2}\{(\text{初項})+(\text{末項})\}$$

㊫ 公差 d とすると

$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\ell$ ……①

$S=\ell+(\ell-d)+(\ell-2d)+\cdots+a$ ……②

①＋② として

$$2S=\underbrace{(a+\ell)+(a+\ell)+(a+\ell)+\cdots+(a+\ell)}_{n\text{ 個}}$$

$$=n(a+\ell)$$

よって $S=\dfrac{n}{2}(a+\ell)$

㊙ $\underbrace{3+5+7+\cdots+17+19+21}_{10\text{ 個}}=\dfrac{10}{2}(3+21)=120$

☆等差数列の和 Ⅱ

等差数列 $\{a_n\}$ の第 1 項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

$\boxed{1}$ $S_n=\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}_{n\text{ 個}}=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$

$\boxed{2}$ 公差を d として

$$S_n=\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}_{n\text{ 個}}=\frac{n}{2}\{2a_1+d(n-1)\}$$

㊫ $\boxed{1}$ 初項 a_1，末項 a_n，項数 n の等差数列の和

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ に $a_n=a_1+d(n-1)$ を代入して

$$S_n=\frac{n}{2}\{a_1+a_1+d(n-1)\}$$

$$=\frac{n}{2}\{2a_1+d(n-1)\}$$

㊙ $\boxed{1}$ 一般項が $a_n=2n+1$ とわかるならば

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\{3+(2n+1)\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n(n+2)$$

$\boxed{2}$ $a_1=3$，公差 2 とわかるならば

$$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot3+2(n-1)\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n(n+2)$$

等比数列

数列 $\{a_n\}$ において，各項に一定の数 r をかけると次の項が得られるとき

この数列を **等比数列**（とうひすうれつ）といい r をその **公比**（こうひ）という．

この数列は次の関係式を満たす．

$$a_n \,, \quad a_{n+1} \qquad (\times r)$$

$$a_{n+1} = r\,a_n$$

等比数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ を第 1 項 $a_1 = a$，公比 r の等比数列とするとき

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3, \quad \cdots \quad \xrightarrow{\times r} a_n$$

つまり

（等比数列の第 n 項）＝（第 1 項）×（公比）$^{n-1}$

㊢ 第 1 項 $a_1 = a$ に $a_{1\wedge}a_{2\wedge}a_{3\wedge}\cdots{}_{\wedge}a_n$ の間 $_\wedge$ の $(n-1)$ 個の公比 r をかける

㋫ $a_1 = 3$，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

☆等比数列の一般項 II

数列 $\{a_n\}$ を第 k 項 $a_k = a$，公比 r の等比数列とするとき

$$a_n = a\,r^{n-k}$$

つまり

（等比数列の第 n 項）＝（第 k 項）×（公比）$^{n-k}$

㊢ 第 k 項 $a_k = a$ に $a_{k\wedge}a_{k+1\wedge}a_{k+2\wedge}\cdots{}_{\wedge}a_n$ の間 $_\wedge$ の $(n-k)$ 個の公比 r をかける

㋫ $a_3 = 12$，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 12 \cdot 2^{n-3} = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-3} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

㋫ $a_0 = \dfrac{3}{2}$，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-0} = \frac{3}{2} \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の項の和を S とすると

$$S=\underbrace{a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}}_{n\text{ 個}}$$

$$=\begin{cases} an & (r=1) \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1} & (r\neq 1) \end{cases}$$

つまり（公比）$\neq 1$ ならば

$$(\text{等比数列の和})=\frac{(\text{初項})\left\{1-(\text{公比})^{(\text{項数})}\right\}}{1-(\text{公比})}$$

あるいは

$$(\text{等比数列の和})=\frac{(\text{初項})\left\{(\text{公比})^{(\text{項数})}-1\right\}}{(\text{公比})-1}$$

考 $r=1$ のとき $S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{ 個}}=\boldsymbol{an}$

$r\neq 1$ のとき

$$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots①$$
$$rS=\quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \quad \cdots\cdots②$$

①－② として

$$(1-r)S=a-ar^n$$
$$=a(1-r^n)$$

$1-r\neq 0$ であるから $S=\boldsymbol{\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$

例 $\underbrace{3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+3\cdot 2^9}_{10\text{ 個}}=\dfrac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3(1024-1)=3069$

等比数列の和 II

公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の第1項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\underbrace{a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}}_{n\text{ 個}}$$

$\boxed{1}$ $r=1$ のとき

$$S_n=a_1n$$

$\boxed{2}$ $r\neq 1$ のとき

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{または} \quad S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

例 $3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

等差中項

a，b，c がこの順で等差数列のとき b を 等差中項（とうさちゅうこう）といい

$$b=\frac{a+c}{2} \quad \text{すなわち} \quad 2b=a+c$$

考 a，b，c がこの順で等差数列のとき，公差を d とすると $a=b-d$，$c=b+d$

$$\frac{a+c}{2}=\frac{(b-d)+(b+d)}{2}=b$$

$$a, \xrightarrow{+d} b, \xrightarrow{+d} c$$

例 2，5，8 はこの順で等差数列で等差中項は 5

補 等差中項は 3 つのデータの平均値，中央値になる．

等比中項

a，b，c はすべて 0 でないとする．

a，b，c がこの順で等比数列のとき b を 等比中項（とうひちゅうこう）といい

$$b^2=ac$$

考 a，b，c がこの順で等比数列のとき，公比を $r\ (\neq 0)$ とすると $a=\dfrac{b}{r}$，$c=br$

$$ac=\frac{b}{r}\cdot br=b^2$$

$$a, \xrightarrow{\times r} b, \xrightarrow{\times r} c$$

例 2，6，18 はこの順で等比数列で等比中項は 6

補 $b^2>0$ なので $ac>0$ つまり a と c は同符号である．

定数数列

数列 $\{a_n\}$ において，どの項も n によらない一定の数であるとき

この数列を **定数数列**（ていすうすうれつ） という．

この数列は次の関係式を満たす．

$$a_{n+1} = a_n$$

㋑例 $a_n = 3$ は定数数列 3, 3, 3, 3, 3, $\cdots$

補 公比が 1 の等比数列，公差が 0 の等差数列と考えてもよい．

和の記号 Σ

数列 $\{a_n\}$ の a_p から a_q までの和を

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q$$

とかく.

すなわち $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k$ は k を p, $p+1$, $\cdots$, q としたときのすべての a_k の和を表す.

とくに 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

とかく.

㊟補 Σ はギリシャ文字で「シグマ」とよむ

Σ の基本性質

Σ は変数の取り方に関係なく同じ和になる.

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

㊟例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$

Σ の性質

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\boxed{3}$ p を k に無関係な定数とするとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}pa_k=p\sum_{k=1}^{n}a_k$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と k に無関係な定数 s，t に対して

$$\sum_{k=1}^{n}(sa_k+tb_k)=s\sum_{k=1}^{n}a_k+t\sum_{k=1}^{n}b_k$$

㊫ $\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}pa_k=pa_1+pa_2+\cdots+pa_n$

$$=p(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$=p\sum_{k=1}^{n}a_k$$

累乗の和の公式

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+\cdots+c}_{n\text{ 個}} = cn$ （ただし，c は n に無関係な定数）

とくに，$c=1$ ならば

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 個}} = n$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

考 $\boxed{2}$ 初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和

$\boxed{3}$ $k^3-(k-1)^3 = 3k^2-3k+1$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{k^3-(k-1)^3\right\} = \sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)$$

これより $\displaystyle n^3 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$

すなわち
$$3\sum_{k=1}^{n}k^2 = n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\{2(n-1)+3\}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{3}$ $k^2-k = (k-1)k = \dfrac{1}{3}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}$$

すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$

よって
$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)}{6}\{3+2(n-1)\}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ と同じように示せる．

補 $\boxed{2}$ の和を 2 乗すると $\boxed{4}$ の和になる．

指数関数形の和の公式

$r \neq 1$ とする．

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \underbrace{r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n}_{n\text{ 個}} = \frac{r(1-r^n)}{1-r} = \frac{r(r^n-1)}{r-1}$$

㋙ 初項 r，公比 r，項数 n の等比数列の和

㋫ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = \underbrace{2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n}_{n\text{ 個}} = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2^{n+1} - 2$

階差と和

差の形を利用して次のように和を求めることができる．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_k)=a_{n+2}+a_{n+1}-a_2-a_1$

考 $\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+(\cancel{a_4}-\cancel{a_3})+\cdots+(a_{n+1}-\cancel{a_n})$

$=a_{n+1}-a_1$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_k)=(\cancel{a_3}-a_1)+(\cancel{a_4}-a_2)+(\cancel{a_5}-\cancel{a_3})+\cdots+(a_{n+1}-\cancel{a_{n-1}})+(a_{n+2}-\cancel{a_n})$

$=-a_1-a_2+a_{n+1}+a_{n+2}$

$=a_{n+2}+a_{n+1}-a_2-a_1$

考 対称的に項が残って，和が求まる．

補 $\boxed{1}$ で k を $k-1$ とすると $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\displaystyle=1-\frac{1}{n+1}$

$\displaystyle=\frac{n}{n+1}$

☆ Σ の変換

次のような和は変形できる.

$\boxed{1}$ p を整数として　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-p} = \sum_{k=1-p}^{n-p} a_k$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k$

㊂ $\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-p} = a_{1-p} + a_{2-p} + \cdots + a_{n-1-p} + a_{n-p}$

$\displaystyle = \sum_{k=1-p}^{n-p} a_k$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$

$= a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$（たす順番を逆にした）

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{n} a_k$

㊟ $\boxed{1}$ p だけずらしてたしている

$\boxed{2}$ たす順番を逆にしている

㊀ $\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 = n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 + 0^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$

等差数列と等比数列の積の和

$p,\ q,\ a,\ r$ を k に無関係な定数，$p \neq 0,\ r \neq 1$ とする．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(pk+q) \cdot ar^{k-1}\}$$

すなわち $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\text{等差数列}) \times (\text{公比}\ r\ \text{の等比数列})\}$ は

次のように求めることができる．

$\boxed{1}$ $S_n - rS_n$ を計算する

$\boxed{2}$ $(pk+q) \cdot ar^{k-1} = f(k) - f(k-1)$ と変形する．

例 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ を求める．

$\boxed{1}$ $S_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$ ……①

$2S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$ ……②

①－② として

$$-S_n = 1 + 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$$

$$= \frac{2^n - 1}{2-1} - n \cdot 2^n$$

$$= (1-n) \cdot 2^n - 1$$

よって $S_n = \boldsymbol{(n-1) \cdot 2^n + 1}$

$\boxed{2}$ $f(k) = (ak+b) \cdot 2^k$ とおくと

$$k \cdot 2^{k-1} = f(k) - f(k-1)$$
$$= (ak+b) \cdot 2 \cdot 2^{k-1} - \{a(k-1)+b\} \cdot 2^{k-1}$$
$$= (ak+a+b) \cdot 2^{k-1}$$

k の恒等式として $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ $\therefore a = 1,\ b = -1$

このことから $f(k) = (k-1) \cdot 2^{k-1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \{f(k) - f(k-1)\}$$
$$= f(n) - f(0)$$
$$= (n-1) \cdot 2^n - (-1)$$
$$= \boldsymbol{(n-1) \cdot 2^n + 1}$$

数列の和と一般項の関係

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

について

$\boxed{1}$ $n = 1$ のとき　$a_1 = S_1$

$\boxed{2}$ $n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

すなわち

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

考 $\boxed{1}$ $S_1 = a_1$

$\boxed{2}$ $n \geqq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad \cdots\cdots①$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

①－② として　$S_n - S_{n-1} = a_n$

階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 つの項の差 $a_{n+1} - a_n = b_n$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）

を項とする数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の **階差数列**（かいさすうれつ）という．

補 $a_2 - a_1 = b_1$

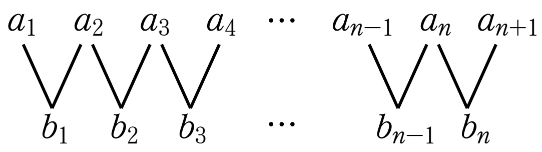
$a_3 - a_2 = b_2$

$a_4 - a_3 = b_3$

$\vdots$

$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$

$a_{n+1} - a_n = b_n$



階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする．

つまり

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とすると

$$n \geqq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

考 $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= \cancel{a_1} + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \cdots + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) \\ &= a_n \end{aligned}$$

補 階差数列 $\{b_n\}$ が定数数列 $b_n = d$ ならば，数列 $\{a_n\}$ は公差 d の等差数列である．

$n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d = a_1 + d(n-1)$

$n = 1$ のときも成り立つので $a_n = a_1 + d(n-1)$

群数列の解法

群数列(ぐんすうれつ) は 各群の最後（群尾）が第何項であるかを調べる

（最初から項がいくつあるかをチェック）

㊗ マラソンランナーの最下位の人が第何位かを考えるイメージ

座標平面で格子点の個数を求める解法

座標平面において，格子点 (x, y) （x，y はともに整数）の個数を求めるときは

直線 $x = k$ または 直線 $y = k$

など x，y のいずれか一方を固定して，その直線上の格子点の個数を求め，

k の範囲に注意して，たしあわせることで求めることができる．

㊗ 串（直線）に団子（格子点）を刺して，団子の個数を数えるイメージ．

漸化式

数列において，その前の項から次の項をただ 1 通りに定める規則を示す等式を **漸化式**（ぜんかしき） という．

漸化式を満たす数列の一般項を漸化式の**解**といい，

その解を求めることを漸化式を**解く**という．

とくに 数列 $\{a_n\}$ において

$a_{n+1} = f(a_n)$ となる漸化式を **隣接二項間漸化式**（りんせつにこうかんぜんかしき） という．

$a_{n+2} = F(a_{n+1},\, a_n)$ となる漸化式を **隣接三項間漸化式**（りんせつさんこうかんぜんかしき） という．

定数数列の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n$$

について，数列 $\{a_n\}$ は定数数列であるから

$$a_n = a$$

(補) 数列 $\{a_n\}$ は公差が 0 の等差数列，あるいは公比が 1 の等比数列と考えてもよい．
$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ となる．

(例) 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を解くと $a_n = \mathbf{2}$

等差数列の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d \ (d \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

$a_n \xrightarrow{+d} a_{n+1}$

について，数列 $\{a_n\}$ は第 1 項 a，公差 d の等差数列であるから

$$a_n = a + (n-1)d$$

例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を解くと

$$a_n = 2 + 3(n-1) = \boldsymbol{3n-1}$$

等比数列の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = r\,a_n \ \ (r \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

$a_n \xrightarrow{\times r} a_{n+1}$

について，数列 $\{a_n\}$ は第 1 項 a，公比 r の等比数列であるから

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 5a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を解くと

$a_n = \mathbf{2 \cdot 5^{n-1}}$

等比数列の漸化式の等式変形

数列 $\{A_n\}$ の漸化式

$A_{n+1} = r\,A_n$（r は n に無関係な定数）ただし $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

について，これをくり返して

$$
\begin{aligned}
A_n &= rA_{n-1}\ (n \geqq 1)\\
&= r^2A_{n-2}\ (n \geqq 2)\\
&= r^3A_{n-3}\ (n \geqq 3)\\
&\ \ \vdots\\
&= r^{n-3}A_3\ (n \geqq 3)\\
&= r^{n-2}A_2\ (n \geqq 2)\\
&= r^{n-1}A_1\ (n \geqq 1)\\
&= r^nA_0\ (n \geqq 0)
\end{aligned}
$$

たしたら n

つまり $A_n = r^{\bigcirc}A_{\square}$　$(\bigcirc + \square = n)$

漸化式 $a_{n+1}=a_n+b_n$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=a_n+b_n$$

について

$$a_{n+1}-a_n=b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$$n\geqq 2 \text{ のとき } a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

補 数列 $\{b_n\}$ が定数数列ならば，数列 $\{a_n\}$ は等差数列になる．

例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$ を解くと

$n\geqq 2$ のとき $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

よって $a_n=\mathbf{2^n-1}$

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_{n+1}=pa_n+q\ (p,\ q \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

について

$\boxed{1}$ $p=1$ のとき

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+q$$

数列 $\{a_n\}$ は第 1 項 a，公差 q の等差数列であるから

$$a_n=a+(n-1)q$$

$\boxed{2}$ $p \neq 1$ のとき

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad \cdots\cdots①$$
$$\alpha=p\alpha+q \quad \cdots\cdots②$$

① − ② として $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ ただし ② から $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$

数列 $\{a_n-\alpha\}$ は第 1 項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

よって $a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$

補 $\boxed{2}$ $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$ として変形すると

$$a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=p\left(a_n-\frac{q}{1-p}\right)$$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{q}{1-p}\right\}$ は第 1 項 $a_1-\dfrac{q}{1-p}=a-\dfrac{q}{1-p}$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-\frac{q}{1-p}=\left(1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$$

よって $a_n=\left(1-\dfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1}+\dfrac{q}{1-p}$

例 $\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$ を解くと

$$a_{n+1}=3a_n-2 \quad \cdots\cdots①$$
$$\alpha=3\alpha-2 \quad \cdots\cdots②$$

① − ② として $a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$ ただし ② から $\alpha=1$

変形して $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

数列 $\{a_n-1\}$ は第 1 項 $a_1-1=3-1=2$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-1=2\cdot 3^{n-1}$$

よって $a_n=\mathbf{2\cdot 3^{n-1}+1}$

☆漸化式 $a_{n+1}=pa_n+(n$ の 1 次式$)$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$a_1=a,\ a_{n+1}=p\,a_n+qn+r$ （$p,\ q,\ r$ は n に無関係な定数，$q \neq 0$）

について

$\boxed{1}$ $p=1$ のとき

$a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=qn+r$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{qn+r\}$ であるから

$n \geqq 2$ のとき $a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}(qk+r)$

$\boxed{2}$ $p \neq 1$ のとき

$a_{n+1}=p\,a_n\quad+qn+r$ ……①

$g(n+1)=p\,g(n)+qn+r$ ……②

② が n の恒等式となる 1 次式 $g(n)=\alpha n+\beta$ を求める．

① − ② として $a_{n+1}-g(n+1)=p\left\{a_n-g(n)\right\}$

数列 $\{a_n-g(n)\}$ は第 1 項 $a_1-g(1)$，公比 p の等比数列であるから

$a_n-g(n)=\left\{a_1-g(1)\right\}\cdot p^{n-1}$

よって $a_n=\left\{a_1-g(1)\right\}\cdot p^{n-1}+g(n)$

$\boxed{3}$ $a_{n+1}=p\,a_n+qn+r$ ……①

① の n を $n+1$ として

$a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q(n+1)+r$ ……②

② − ① として $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+q$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ ……③

とおくと $b_{n+1}=p\,b_n+q$

この漸化式を解いて 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める．

求めた数列 $\{b_n\}$ と ① を ③ へ代入すると 数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる．

㊔ $\boxed{2}$ 等比数列の漸化式へ変形

$\boxed{3}$ 階差を利用する

㊗ $\boxed{3}$ ③ から数列 $\{a_n\}$ の階差数列が数列 $\{b_n\}$ であることからも数列 $\{a_n\}$ は求まる．

★漸化式 $a_{n+1}=pa_n+$（n の整式）

$f(n)$ は m 次の整式とする.

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$a_1=a$，$a_{n+1}=p\,a_n+f(n)$（p は n に無関係な定数）

について

$\boxed{1}$ $p=1$ のとき

$a_1=a$，$a_{n+1}-a_n=f(n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{f(n)\}$ であるから

$n\geqq 2$ のとき $a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

$\boxed{2}$ $p\neq 1$ のとき

$$a_{n+1}=p\,a_n+f(n)\quad\cdots\cdots①$$
$$g(n+1)=p\,g(n)+f(n)\quad\cdots\cdots②$$

② が n の恒等式となる m 次式 $g(n)$ を求める.

① − ② として $a_{n+1}-g(n+1)=p\left\{a_n-g(n)\right\}$

数列 $\{a_n-g(n)\}$ は第 1 項 $a_1-g(1)$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-g(n)=\left\{a_1-g(1)\right\}\cdot p^{n-1}$$

よって $a_n=\left\{a_1-g(1)\right\}\cdot p^{n-1}+g(n)$

$\boxed{3}$ $a_{n+1}=p\,a_n+f(n)\quad\cdots\cdots①$

① の n を $n+1$ として

$$a_{n+2}=p\,a_{n+1}+f(n+1)\quad\cdots\cdots②$$

② − ① として $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+f(n+1)-f(n)$

ここで $f(n+1)-f(n)$ は $(m-1)$ 次式

$$a_{n+1}-a_n=b_n\quad\cdots\cdots③$$

とおくと $b_{n+1}=p\,b_n+f(n+1)-f(n)$

この漸化式を解いて 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める.

求めた数列 $\{b_n\}$ と ① を ③ へ代入すると 数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる.

考 $\boxed{2}$ 等比数列の漸化式へ変形

$\boxed{3}$ 階差を $(m-1)$ 回利用

☆漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q^n$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$a_1=a$, $a_{n+1}=pa_n+q^n$ （p, q は n に無関係な定数，$p \neq 0$, $q \neq 0$）

について

$\boxed{1}$ $p=1$ のとき

$$a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=q^n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が数列 $\{q^n\}$ であるから

$n \geqq 2$ のとき $a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1} q^k$

$\boxed{2}$ $p \neq 1$ のとき

$$a_{n+1}=pa_n+q^n \quad \cdots\cdots①$$
$$g(n+1)=pg(n)+q^n \quad \cdots\cdots②$$

② が n の恒等式となる $g(n)=(\alpha n+\beta)\cdot q^n$ を求める．

① − ② として $a_{n+1}-g(n+1)=p\{a_n-g(n)\}$

数列 $\{a_n-g(n)\}$ は第 1 項 $a_1-g(1)$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-g(n)=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}$$

よって $a_n=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}+g(n)$

$\boxed{3}$ 両辺 q^{n+1} で割り

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$$
$$\frac{a_n}{q^n}=b_n \quad \cdots\cdots①$$

とおき $b_{n+1}=\frac{p}{q}b_n+\frac{1}{q}$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から 数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる．

$\boxed{4}$ 両辺 p^{n+1} で割り

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^n$$
$$\frac{a_n}{p^n}=b_n \quad \cdots\cdots①$$

とおき $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^n$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から 数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる．

☆漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}\quad (p,\ q,\ r \text{ は } 0 \text{ 以外の } n \text{ に無関係な定数})$$

について

$\boxed{1}$ $a=0$ のとき

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$$

よって $a_n=0$

$\boxed{2}$ $a \neq 0$ のとき

帰納的に任意の自然数 n に対して $a_n \neq 0$

両辺で逆数をとり $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{qa_n+r}{pa_n}$

すなわち $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{r}{p}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{q}{p}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ ……①

とおくと $b_{n+1}=\dfrac{r}{p}b_n+\dfrac{q}{p}$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から 数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる．

例 漸化式 $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n}{a_n+8}$ を解く

$a_1=4>0$ であるから帰納的にすべての自然数 n に対して $a_n>0$

両辺で逆数をとり $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+8}{4a_n}$ すなわち $\dfrac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{4}$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ ……①

とおくと $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{4}$

$b_{n+1}=2b_n+\dfrac{1}{4}$

変形して $b_{n+1}+\dfrac{1}{4}=2\left(b_n+\dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ は第 1 項 $b_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列であるから

$b_n+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n-1}$ すなわち $b_n=\dfrac{2^n-1}{4}$

よって ① から $a_n=\boldsymbol{\dfrac{4}{2^n-1}}$

★漸化式 $a_{n+1}=f(n)a_n$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_{n+1}=f(n)a_n \quad \text{ただし } f(n) \text{ は定数ではない}$$

について

$\boxed{1}$ $n \geqq 2$ のとき

繰り返し変形して $a_n=f(n-1)f(n-2)\cdot\cdots\cdot f(1)a_1$

$\boxed{2}$ 両辺を $(n+1)!$ で割り

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{f(n)}{n+1}\cdot\frac{a_n}{n!}$$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n!}\right\}$ についての漸化式 を考える.

$\boxed{3}$ 任意の自然数 n に対して $a_n>0,\ f(n)>0$ であるならば

底が c の対数をとり

$$\log_c a_{n+1}=\log_c f(n)+\log_c a_n$$

$$\log_c a_n=b_n \quad \cdots\cdots①$$

とおくと $b_1=\log_c a_1=\log_c a,\ b_{n+1}=b_n+\log_c f(n)$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{\log_c f(n)\}$ である.

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる.

㊋ $\boxed{1}$ の求め方が定石だが，問題によっては $\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の解法も頭に入れておくとよい.

㊟ 数列 $\{a_n\}$ は公比 $f(n)$ の等比数列としないこと.

㊐ 漸化式 $a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)a_n$ を解く.

$\boxed{1}$ $n \geqq 2$ のとき 繰り返し変形して

$$\begin{aligned} a_n &= n a_{n-1} \\ &= n(n-1)a_{n-2} \\ &\ \ \vdots \\ &= n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\cdot a_1 \\ &= n! \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

よって $\boldsymbol{a_n=n!}$

$\boxed{2}$ 両辺を $(n+1)!$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

$\left\{\dfrac{a_n}{n!}\right\}$ は定数数列であるから $\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_1}{1!}=1$

よって $\boldsymbol{a_n=n!}$

★漸化式 $a_{n+2}+p\,a_{n+1}+q\,a_n=0$ を解く手順

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_2=b,\ a_{n+2}+p\,a_{n+1}+q\,a_n=0$$

（p，q は 0 でない n に無関係な定数）

について，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある．

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解 $x=\alpha,\ \beta$（重解は $\alpha=\beta$）を求める．

$\boxed{2}$ $\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\,a_n) & \cdots\cdots① \\ a_{n+2}-\beta\,a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta\,a_n) & \cdots\cdots② \end{cases}$

と変形する．（重解は ① と ② が同じ式）

$\boxed{3}$ ① において $a_{n+1}-\alpha\,a_n=b_n$ ……③

とおくと $b_{n+1}=\beta\,b_n$

数列 $\{b_n\}$ は第 1 項 $b_1=a_2-\alpha a_1=b-\alpha a$，公比 β

の等比数列であるから

$$b_n=(b-\alpha a)\beta^{n-1}$$

② において $a_{n+1}-\beta\,a_n=c_n$ ……④

とおくと $c_{n+1}=\alpha\,c_n$

数列 $\{c_n\}$ は第 1 項 $c_1=a_2-\beta a_1=b-\beta a$，公比 α

の等比数列であるから

$$c_n=(b-\beta a)\alpha^{n-1}$$

$\boxed{4}$ ③ − ④ として $(\beta-\alpha)a_n=b_n-c_n$

$\alpha \neq \beta$ ならば $a_n=\dfrac{b_n-c_n}{\beta-\alpha}=\dfrac{(b-\alpha a)\beta^{n-1}-(b-\beta a)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}$

③，④ のいずれか一方からも数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる．

㋕ ①，② は $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

変形するには $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ であることが必要で，

α，β が解となる 2 次方程式の 1 つが $x^2+px+q=0$

(補) 重解のときは ③ の隣接二項間漸化式を解けばよい．

☆連立漸化式

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ \begin{cases} a_{n+1} = p\,a_n + q\,b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1} = r\,a_n + s\,b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

$(a,\ b,\ p,\ q,\ r,\ s$ は n に無関係な定数で $(a, b) \neq (0, 0)$, $(p-s)^2+4qr>0$, $r \neq 0)$

について，2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある．

$\boxed{1}$ ①＋②×α として $a_{n+1}+\alpha b_{n+1} = (p+r\alpha)a_n+(q+s\alpha)b_n$ ……③

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が公比 $(p+r\alpha)$ の等比数列になるような α を求める．

つまり

$$\begin{aligned} a_{n+1}+\alpha\,b_{n+1} &= (p+r\alpha)(a_n+\alpha b_n) && \cdots\cdots④ \\ &= (p+r\alpha)a_n+(p\alpha+r\alpha^2)b_n && \cdots\cdots⑤ \end{aligned}$$

を満たす α を求める．

③と⑤の（右辺）の b_n の係数が等しいので $q+s\alpha = p\alpha+r\alpha^2$

すなわち $r\alpha^2+(p-s)\alpha-q=0$ を満たす α を求める．

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ で求めた 2 つの α に対し④を考える．

それぞれ数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が公比 $(p+r\alpha)$ の等比数列であることから，

2 つの関係式を作り 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項は求まる．

㊓ $p=s$ かつ $q=r$ ならば $\alpha=\pm1$ となり，$\boxed{\text{対称性のある連立漸化式}}$になる．

㊓ 連立漸化式から b_n を消して，数列 $\{a_n\}$ の$\boxed{\text{隣接三項間漸化式}}$に帰着することもできる．

㊖ 行列からも求まる．

対称性のある連立漸化式

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ b_1=b,\ \begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=q\,a_n+p\,b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

（a, b, p, q は n に無関係な定数で $(a, b)\neq(0, 0)$, $q\neq 0$）

について，2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある．

$\boxed{1}$ ① + ② として $a_{n+1}+b_{n+1}=(p+q)(a_n+b_n)$ ……③

① − ② として $a_{n+1}-b_{n+1}=(p-q)(a_n-b_n)$ ……④

$\boxed{2}$ ③ から 数列 $\{a_n+b_n\}$ は第 1 項 $a_1+b_1=a+b$, 公比 $p+q$ の等比数列

④ から 数列 $\{a_n-b_n\}$ は第 1 項 $a_1-b_1=a-b$, 公比 $p-q$ の等比数列

すなわち

$$\begin{cases} a_n+b_n=(a+b)(p+q)^{n-1} & \cdots\cdots⑤ \\ a_n-b_n=(a-b)(p-q)^{n-1} & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $\dfrac{⑤+⑥}{2}$ として $a_n=\dfrac{(a+b)(p+q)^{n-1}+(a-b)(p-q)^{n-1}}{2}$

$\dfrac{⑤-⑥}{2}$ として $b_n=\dfrac{(a+b)(p+q)^{n-1}-(a-b)(p-q)^{n-1}}{2}$

補 連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=r\,a_n+s\,b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$

は $p=s$ かつ $q=r$ ならば 2 式の和 ① + ②, 差 ① − ② を計算するとよい．

例 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1=2,\ b_1=1,\ \begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=a_n+2b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① + ② として $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$ ……③

① − ② として $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$ ……④

③ から数列 $\{a_n+b_n\}$ は第 1 項 $a_1+b_1=3$, 公比 3 の等比数列

④ から数列 $\{a_n-b_n\}$ は第 1 項 $a_1-b_1=1$, 公比 1 の等比数列（定数数列）

すなわち

$$\begin{cases} a_n+b_n=3^n & \cdots\cdots⑤ \\ a_n-b_n=1 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

$\dfrac{⑤+⑥}{2}$ として $\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n+1}{2}}$

$\dfrac{⑤-⑥}{2}$ として $\boldsymbol{b_n=\dfrac{3^n-1}{2}}$

数学的帰納法

すべての自然数 n に対して

命題 $P(n)$ が成り立つ ……Ⓐ

ことを証明するのに

（Ⅰ）出発点が成り立つ

（Ⅱ）次から次へと成り立つ

という2つの（Ⅰ），（Ⅱ）を示すことでⒶが証明される方法がある．

この証明法を **数学的帰納法**（すうがくてききのうほう）という．

㊛（Ⅰ），（Ⅱ）はどちらから示してもよい．

㊛（Ⅰ），（Ⅱ）の具体例に次がある．

$\boxed{1}$（Ⅰ）$n=1$ のとき，Ⓐは成り立つ．

（Ⅱ）$n=k$ $(k=1, 2, \cdots)$ のときⒶが成り立つとする仮定すると，

$n=k+1$ のときもⒶが成り立つ．

$\boxed{2}$（Ⅰ）$n=1, 2$ のとき，Ⓐは成り立つ．

（Ⅱ）$n=k, k+1$ $(k=1, 2, \cdots)$ のときⒶが成り立つとする仮定すると，

$n=k+2$ のときもⒶが成り立つ．

$\boxed{3}$（Ⅰ）$n=1$ のとき，Ⓐは成り立つ．

（Ⅱ）$n=1, 2, \cdots, m$ $(m=1, 2, \cdots)$ のときⒶが成り立つとする仮定すると，

$n=m+1$ のときもⒶが成り立つ．

㊢ $\boxed{1}$「今日が元旦ならば翌日も元旦とする」という法律ができたとすると，

1月1日は元旦なので，1月2日も元旦となり，1月3日も元旦となり ……

1年中元旦になる．